SubTemas

1.1 Introducción al control difuso
1.2 Teoría de conjuntos difusos
1.3 Representación del conocimiento
1.4 Razonamiento aproximado
1.5 Sistemas difusos

1

Tema 1.5 Sistemas difusos

Tópicos

- Estructura de un sistema difuso
- Fusificación (conversión numérica a lingüística)
- Desfusificación (conversión lingüística a numérica)

MÁQUINAS DE INFERENCIA

- Tipo mínimo
- Tipo producto

SISTEMAS DIFUSOS

- Mamdani producto y Mamdani mínimo
- TSK producto y TSK mínimo

2

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Estructura de un sistema difuso**

La aplicación de los sistemas de inferencia difusos en los sistemas de control requiere que las entradas y las salidas sean variables numéricas reales.

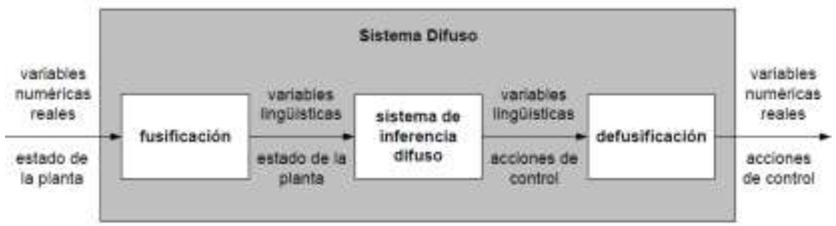
Por esta razón se requiere que los sistemas de inferencia difusos cuenten con etapas de conversión:

- Numérica a lingüística (fusificación)
- Lingüística a numérica (desfusificación)

3

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso**



4

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Conversión numérica a lingüística**

El proceso de fusificación consiste en convertir un valor numérico específico, x^*, de una variable numérica real, x, a un conjunto difuso A′.

Fusificación: $x^* \rightarrow A'$

El conjunto difuso así obtenido puede utilizarse como entrada a un sistema de inferencia difuso para obtener conclusiones.

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Características deseables de un fusificador**

- El conjunto difuso A′ debe tener un grado de pertenencia alto en x^*.
- El fusificador debe ayudar a suprimir posible ruido en la señal x.
- El fusificador debe ayudar a simplificar los cálculos en la máquina de inferencias.

6

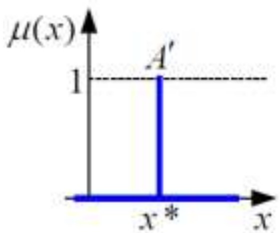
Fusificadores más comunes

Singleton, Gaussiano, Triangular

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Singletón**

Dado un valor específico, x^*, de la variable x, le asigna un conjunto difuso A′ tipo singletón.



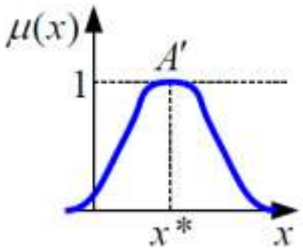
$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = x^* \\ 0 & si\ x \neq x^* \end{cases}$$

8

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Gaussiano**

Dado un valor específico, $x*$, de la variable x, le asigna un conjunto difuso A′ tipo gausiano.

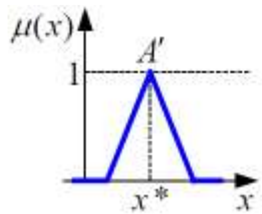


$$\mu_{A'}(x) = e^{-\left(\frac{x-x^*}{a}\right)^2}$$

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Triangular**

Dado un valor específico, $x*$, de la variable x, le asigna un conjunto difuso A′ tipo triangular.



$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - x^*|}{b} & si\,|x - x^*| \le b \\ 0 & si\,|x - x^*| > b \end{cases}$$

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Propiedades de los fusificadores (1/2)**

Los Fusificadores singletón, gausiano y triangular tienen el grado de pertenencia más alto posible en x_*, esto es $\mu_{A'}(x^*) = 1$.

- Los Fusificadores gausiano y triangular puede suprimir ruido en la variable de entrada x, no así el singletón.

11

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Propiedades de los fusificadores (2/2)**

- El fusificador singletón simplifica grandemente los cálculos en la máquina de inferencias para cualquier tipo de funciones de pertenencia en las reglas de inferencia.
- Los Fusificadores gausiano y triangular simplifican los cálculos de la máquina de inferencia cuando las funciones de pertenencia en las reglas de inferencia son gausianas o triangulares, respectivamente.

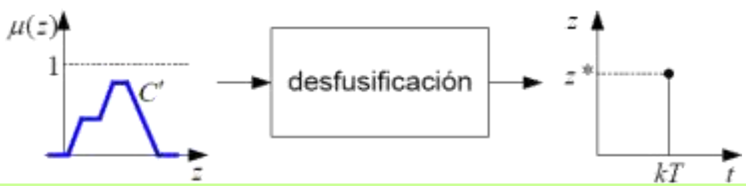
12

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Conversión lingüística a numérica**

El proceso de desfusificación consiste en convertir un conjunto difuso C′ a un valor numérico específico, *z*∗, de una variable numérica real, *z*:

Desfusificación: $C' \rightarrow z*$



El conjunto difuso C′ es la conclusión de salida de un sistema de inferencia difuso, obtenida mediante la unión de los conjuntos difusos de las conclusiones parciales.

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Características de un desfusificador**

- El valor específico z∗ debe representar intuitivamente al conjunto difuso C′.
- La obtención del valor específico z∗ debe ser computacionalmente simple, especialmente para controladores que deben operar en tiempo real.
- Un cambio pequeño en el conjunto difuso C′ no debe resultar en un cambio grande en el valor específico z∗.

14

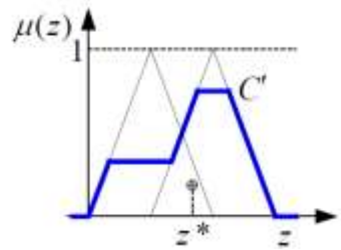
Desfusificadores

Centro de gravedad
Promedio de centros
Promedio ponderado

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Centro de gravedad**

Establece $z*$ como el centro del área determinada por la función de pertenencia del conjunto difuso C′.



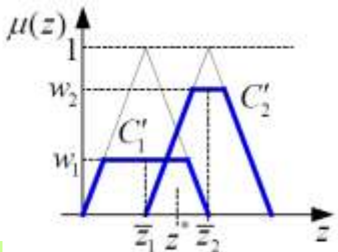
$$z^* = \frac{\int_z z\mu_{C'}(z)}{\int_z \mu_{C'}(z)}$$

Ventaja: La noción del centro de gravedad es muy intuitiva.
Desventaja: El centro de gravedad puede ser muy difícil de calcular (computacionalmente intensivo).

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Promedio de centros (prom. ponderado)**

Establece $z*$ como el promedio ponderado de los centros de los conjuntos difusos parciales que componen al conjunto difuso C′.



$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^{R} w_i \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^{R} w_i}$$

El desfusificador promedio ponderado es el más comúnmente empleado en control difuso debido a que es intuitivo, computacionálmente simple y cambia suavemente.

Máquinas de inferencia

Debido a su simplicidad computacional, las máquinas de inferencia más utilizadas en los sistemas difusos y en los controladores difusos son:

- Máquina de inferencia producto
- Máquina de inferencia mínimo

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Máquina de inferencia producto (1/4)**

Sistema de 2 entradas, 1 salida y R reglas.

Características:

- Inferencia por reglas individuales y combinación unión.
- Implicación local tipo Mamdani producto
- Norma-t: producto algebraico y norma-s: max

19

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Máquina de inferencia producto (2/4)**

De la inferencia por reglas individuales con combinación unión, la salida total (conclusión final) es:

$$\mu_{C'}(z) = \mu_{C_1'}(z) \cup \mu_{C_2'}(z) \cup \cdots \cup \mu_{C_R'}(z)$$

Norma-s: $\cup \leftrightarrow \max$

$$\mu_{C'}(z) = \max\left\{\mu_{C_1'}(z), \mu_{C_2'}(z), \cdots, \mu_{C_R'}(z)\right\} = \max_{r=1}^{R}\left\{\mu_{C_r'}(z)\right\}$$

20

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Máquina de inferencia producto (3/4)**

en donde la salida de cada regla (conclusión parcial) es:

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x,y}\left\{t\left[\mu_{A'\times B'}(x,y), \mu_r(x,y;z)\right]\right\} \quad \text{para} \quad r = 1,2,\cdots,R$$

usando el producto algebraico para la norma-t:

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x,y}\left\{\mu_{A'\times B'}(x,y)\mu_r(x,y;z)\right\} \quad \text{para} \quad r = 1,2,\cdots,R$$

Para cada regla se usa la implicación tipo Mamdani producto

$$\mu_r(x,y;z) = \mu_{A_r\times B_r}(x,y)\mu_{C_r}(z) \quad \text{para} \quad r = 1,2,\cdots,R$$

y para las proposiciones difusas se usa el producto algebraico para la norma-t:

$$\mu_{A_r\times B_r}(x,y) = \mu_{A_r}(x)\mu_{B_r}(y) \quad \text{y} \quad \mu_{A'\times B'}(x,y) = \mu_{A'}(x)\mu_{B'}(y)$$

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Máquina de inferencia producto (4/4)**

Sustituyendo hacia atrás:

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x,y}\left\{\mu_{A'}(x)\mu_{B'}(y)\mu_{A_r}(x)\mu_{B_r}(y)\mu_{C_r}(z)\right\}$$

$$= \max_{x}\left\{\mu_{A'}(x)\mu_{A_r}(x)\right\}\max_{y}\left\{\mu_{B'}(y)\mu_{B_r}(y)\right\}\mu_{C_r}(z)$$

$$= w_{xr}w_{yr}\mu_{C_r}(z)$$

Finalmente:

$$\mu_{C'}(z) = \max_{r=1}^{R}\left\{w_{xr}w_{yr}\mu_{C_r}(z)\right\}$$

es la conclusión de la máquina de inferencia producto.

Tema 1.5 Sistemas difusos

Máquina de inferencia mínimo (1/5)

Sistema de 2 entradas, 1 salida y R reglas.

Utiliza:

- Inferencia por reglas individuales y combinación unión.
- Implicación local tipo Mamdani mínimo
- Norma-t: min y norma-s: max

23

Tema 1.5 Sistemas difusos

Máquina de inferencia mínimo (2/5)

De la inferencia por reglas individuales con combinación unión, la salida total (conclusión final) es:

$$\mu_{C'}(z) = \mu_{C'_1}(z) \cup \mu_{C'_2}(z) \cup \cdots \cup \mu_{C'_R}(z)$$

Norma-s: $\cup \leftrightarrow \max$

$$\mu_{C'}(z) = \max\left\{\mu_{C'_1}(z), \mu_{C'_2}(z), \cdots, \mu_{C'_R}(z)\right\} = \max_{r=1}^{R}\left\{\mu_{C'_r}(z)\right\}$$

24

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Máquina de inferencia mínimo (3/5)**

en donde la salida de cada regla (conclusión parcial) es:

$$\mu_{C_r'}(z) = \max_{x,y}\left\{t\left[\mu_{A'\times B'}(x,y), \mu_r(x,y;z)\right]\right\} \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \cdots, R$$

usando el operador min para la norma-t:

$$\mu_{C_r'}(z) = \max_{x,y}\left\{\min\left(\mu_{A'\times B'}(x,y), \mu_r(x,y;z)\right)\right\} \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \cdots, R$$

Para cada regla se usa la implicación tipo Mamdani mínimo

$$\mu_r(x,y;z) = \min\left\{\mu_{A_r\times B_r}(x,y), \mu_{C_r}(z)\right\} \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \cdots, R$$

y para las proposiciones difusas se usa el operador min para la norma-t

$$\mu_{A_r\times B_r}(x,y) = \min\left\{\mu_{A_r}(x), \mu_{B_r}(y)\right\} \quad \text{y} \quad \mu_{A'\times B'}(x,y) = \min\left\{\mu_{A'}(x), \mu_{B'}(y)\right\}$$

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Máquina de inferencia mínimo (4/5)**

Sustituyendo hacia atrás:

$$\begin{aligned}
\mu_{C_r'}(z) &= \max_{x,y}\left\{\min\left(\min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{B'}(y)\right), \min\left(\min\left(\mu_{A_r}(x), \mu_{B_r}(y)\right), \mu_{C_r}(z)\right)\right)\right\} \\
&= \max_{x,y}\left\{\min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{B'}(y), \mu_{A_r}(x), \mu_{B_r}(y), \mu_{C_r}(z)\right)\right\} \\
&= \max_{x,y}\left\{\mu_{A'}(x) \cap \mu_{A_r}(x) \cap \mu_{B'}(y) \cap \mu_{B_r}(y) \cap \mu_{C_r}(z)\right\} \\
&= \max_{x}\left\{\mu_{A'}(x) \cap \mu_{A_r}(x)\right\} \cap \max_{y}\left\{\mu_{B'}(y) \cap \mu_{B_r}(y)\right\} \cap \mu_{C_r}(z) \\
&= \min\left(\max_{x}\left\{\min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A_r}(x)\right)\right\}, \max_{y}\left\{\min\left(\mu_{B'}(y), \mu_{B_r}(y)\right)\right\}, \mu_{C_r}(z)\right) \\
&= \min\left(w_{xr}, w_{yr}, \mu_{C_r}(z)\right)
\end{aligned}$$

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Máquina de inferencia mínimo (5/5)**

Finalmente:

$$\mu_{C'}(z) = \max_{r=1}^{R} \left\{ \min\left(w_{xr}, w_{yr}, \mu_{C_r}(z) \right) \right\}$$

es la conclusión de la máquina de inferencia mínimo.

27

SISTEMAS DIFUSOS

Mamdani producto

Mamdani mínimo

TSK producto

TSK mínimo

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Variantes de sistemas difusos**

Fusificadores:	3 los más comunes
Máquinas de inferencia:	5 los más comunes
Desfusificadores:	3 los más comunes

3 x 5 x 3 = 45 tipos diferentes de sistemas difusos.

Fusificadores: Singletón

Máquinas de inferencia: Mínimo y producto

Desfusificadores: Promedio ponderado

1 x 2 x 1 = 2 tipos diferentes de sistemas difusos.

Ojo: sólo se están considerando aquellos con reglas tipo Mamdani.

29

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso Mamdani producto (1/5)**

Sea un sistema con 2 entradas, 1 salida y R reglas:

- Fusificación tipo singletón.
- Reglas tipo Mamdani.
- Implicación tipo Mamdani producto
- Norma-t: producto algebraico, Norma-s: max
- Inferencia basada en reglas individuales
- Desfusificación por promedio ponderado

30

Tema 1.5 Sistemas difusos

■ Sistema difuso Mamdani producto (2/5)

Conclusión parcial por cada regla:

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x,y}\left\{t\left[\mu_{A'\times B'}(x,y), \mu_r(x,y;z)\right]\right\} \quad \text{para} \quad r = 1,2,\cdots,R$$

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x,y}\left\{\mu_{A'\times B'}(x,y) \wedge \mu_r(x,y;z)\right\}$$

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x,y}\left\{\mu_{A'\times B'}(x,y) \wedge \mu_{A_r\times B_r}(x,y) \wedge \mu_{C_r}(z)\right\} \quad \text{implicación Mamdani}$$

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x,y}\left\{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_{A_r}(x) \wedge \mu_{B_r}(y) \wedge \mu_{C_r}(z)\right\}$$

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x,y}\left\{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_r}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_{B_r}(y) \wedge \mu_{C_r}(z)\right\}$$

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x}\left\{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_r}(x)\right\} \wedge \max_{y}\left\{\mu_{B'}(y) \wedge \mu_{B_r}(y)\right\} \wedge \mu_{C_r}(z)$$

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_{x}\left\{\mu_{A'}(x)\mu_{A_r}(x)\right\}\max_{y}\left\{\mu_{B'}(y)\mu_{B_r}(y)\right\}\mu_{C_r}(z)$$

$$\mu_{C'_r}(z) = w_{xr}w_{yr}\mu_{C_r}(z)$$

31

Tema 1.5 Sistemas difusos

■ Sistema difuso Mamdani producto (3/5)

en donde por fusificación singletón:

$w_{xr} = \max_{x}\left\{\mu_{A'}(x)\mu_{A_r}(x)\right\} = \mu_{A_r}(x^*)$, x^* es un valor específico de x

$w_{yr} = \max_{y}\left\{\mu_{B'}(y)\mu_{B_r}(y)\right\} = \mu_{B_r}(y^*)$, y^* es un valor específico de y

por tanto: $\mu_{C'_r}(z) = \mu_{A_r}(x^*)\mu_{B_r}(y^*)\mu_{C_r}(z)$

con $\bar{z}_r$ = centro de $\mu_{C'_r}(z)$ = centro de $\mu_{C_r}(z)$

y $w_r = w_{xr}w_{yr} = \mu_{A_r}(x^*)\mu_{B_r}(y^*)$ es la altura de $\mu_{C'_r}(z)$

32

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso Mamdani producto (4/5)**

Desfusificando por promedios ponderados:

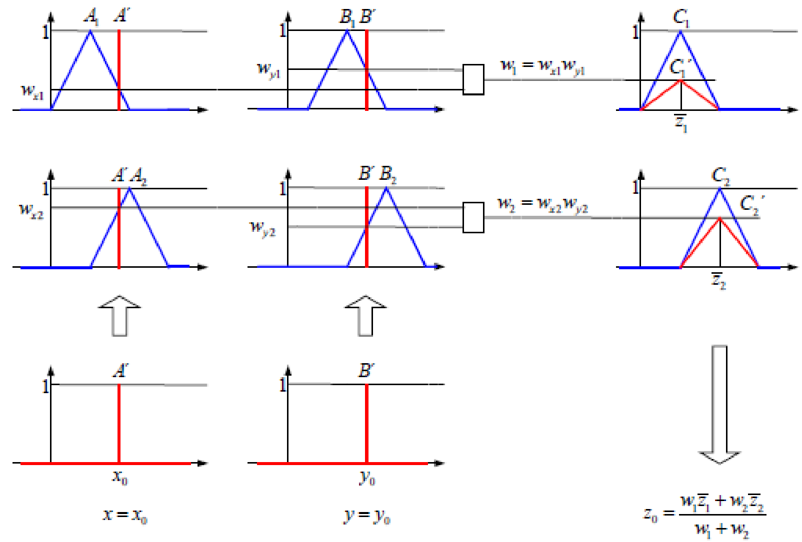
$$z^* = \frac{\sum_{r=1}^{R} w_r \bar{z}_r}{\sum_{r=1}^{R} w_r} = \frac{\sum_{r=1}^{R} \mu_{A_r}(x^*)\mu_{B_r}(y^*)\bar{z}_r}{\sum_{r=1}^{R} \mu_{A_r}(x^*)\mu_{B_r}(y^*)}$$

z^* es el valor específico de salida del sistema de difuso tipo Mamdani producto para los valores específicos de entrada x^* y y^*.

Ojo: Nótese que se usa la máquina de inferencia Mamdani producto pero sin realizar la combinación de las conclusiones parciales.

33

- **Sistema difuso Mamdani producto (5/5)**



Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso Mamdani mínimo (1/5)**

Sea un sistema con 2 entradas, 1 salida y R reglas:

- Fusificación tipo singletón.
- Reglas tipo Mamdani.
- Implicación tipo Mamdani mínimo
- Norma-t: min, Norma-s: max
- Inferecia basada en reglas individuales
- Desfusificación por promedio ponderado

35

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso Mamdani mínimo (2/5)**

Procediendo análogamente que en el caso anterior:

$$\mu_{C'_r}(z) = \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_r}(x)\} \wedge \max_y \{\mu_{B'}(y) \wedge \mu_{B_r}(y)\} \wedge \mu_{C_r}(z)$$

$$\mu_{C'_r}(z) = \min\left\{\max_x \{\min(\mu_{A'}(x), \mu_{A_r}(x))\}, \max_y \{\min(\mu_{B'}(y), \mu_{B_r}(y))\}, \mu_{C_r}(z)\right\}$$

$$\mu_{C'_r}(z) = \min(w_{xr}, w_{yr}, \mu_{C_r}(z))$$

en donde por fusificación singletón:

$$w_{xr} = \max_x \{\min(\mu_{A'}(x), \mu_{A_r}(x))\} = \mu_{A_r}(x^*) \quad ,$$

x^* es un valor específico de x

$$w_{yr} = \max_y \{\min(\mu_{B'}(y), \mu_{B_r}(y))\} = \mu_{B_r}(y^*) \quad ,$$

y^* es un valor específico de y

36

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso Mamdani mínimo (3/5)**

Por tanto:

$$\mu_{C_r'}(z) = \min\left(\mu_{A_r}(x^*), \mu_{B_r}(y^*), \mu_{C_r}(z)\right)$$

con $\bar{z}_r$ = centro de $\mu_{C_r'}(z)$ = centro de $\mu_{C_r}(z)$

y $w_r = \min(w_{xr}, w_{yr}) = \min\left(\mu_{A_r}(x^*), \mu_{B_r}(y^*)\right)$ es la altura de $\mu_{C_r'}(z)$

37

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso Mamdani mínimo (4/5)**

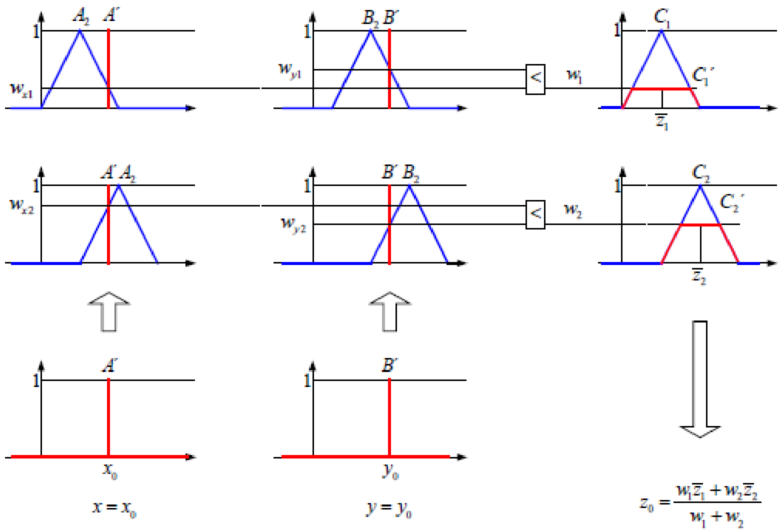
Desfusificando por promedios ponderados:

$$z^* = \frac{\sum_{r=1}^{R} w_r \bar{z}_r}{\sum_{r=1}^{R} w_r} = \frac{\sum_{r=1}^{R} \min\left\{\mu_{A_r}(x^*), \mu_{B_r}(y^*)\right\} \bar{z}_r}{\sum_{r=1}^{R} \min\left\{\mu_{A_r}(x^*), \mu_{B_r}(y^*)\right\}}$$

z^* es el valor específico de salida del sistema de difuso tipo Mamdani producto para los valores específicos de entrada x^* y y^*.

38

Sistema difuso Mamdani mínimo (5/5)



Tema 1.5 Sistemas difusos

Sistema difuso TSK producto (1/3)

Sea un sistema con 2 entradas, 1 salida y R reglas:

- Fusificación tipo singletón.
- Reglas tipo TSK.
- Implicación tipo Mamdani producto
- Norma-t: producto algebraico, Norma-s: max
- Inferencia basada en reglas individuales
- Combinación por promedio ponderado

Procediendo como en los casos anteriores, la salida obtenida por promedios ponderados:

$$z^* = \frac{\sum_{r=1}^{R} w_r z_r}{\sum_{r=1}^{R} w_r} = \frac{\sum_{r=1}^{R} \mu_{A_r}(x^*)\mu_{B_r}(y^*) z_r}{\sum_{r=1}^{R} \mu_{A_r}(x^*)\mu_{B_r}(y^*)}$$

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso TSK producto (2/3)**

en donde la conclusión de cada regla es una combinación lineal de los valores numéricos de entrada:

$$z_r = p_r x^* + q_r y^* + s_r$$

y los pesos se calculan igual que en el sistema difuso Mamdani producto:

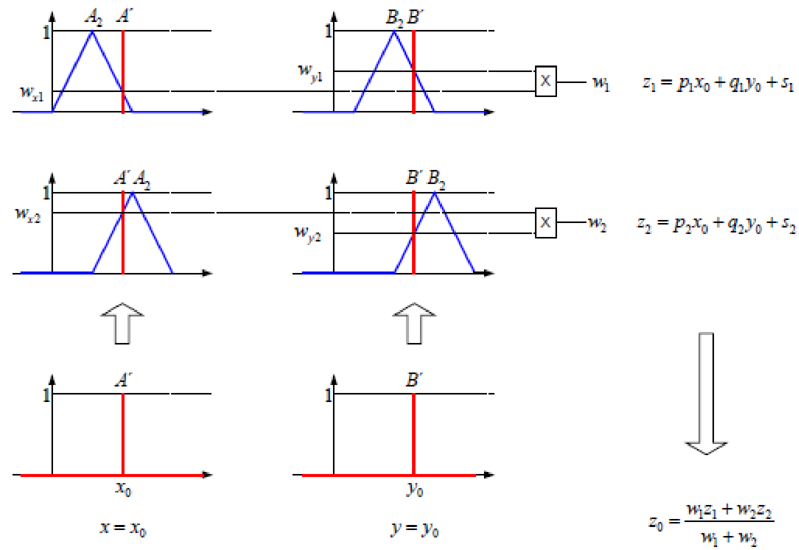
$$w_r = w_{xr} w_{yr} = \mu_{A_r}(x^*)\mu_{B_r}(y^*)$$

en donde por fusificación singletón:

$$w_{xr} = \max_x \{\mu_{A'}(x)\mu_{A_r}(x)\} = \mu_{A_r}(x^*)$$

$$w_{yr} = \max_y \{\mu_{B'}(y)\mu_{B_r}(y)\} = \mu_{B_r}(y^*)$$

- **Sistema difuso TSK producto (3/3)**



Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso TSK mínimo (1/4)**

Sea un sistema con 2 entradas, 1 salida y R reglas:

- Fusificación tipo singletón.
- Reglas tipo TSK.
- Implicación tipo Mamdani mínimo
- Norma-t: min, Norma-s: max
- Inferencia basada en reglas individuales
- Combinación por promedio ponderado

43

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso TSK mínimo (2/4)**

Procediendo como en los casos anteriores, la salida obtenida por promedios ponderados será:

$$z^* = \frac{\sum_{r=1}^{R} w_r z_r}{\sum_{r=1}^{R} w_r} = \frac{\sum_{r=1}^{R} \min\left(\mu_{A_r}(x^*), \mu_{B_r}(y^*)\right) z_r}{\sum_{r=1}^{R} \min\left(\mu_{A_r}(x^*), \mu_{B_r}(y^*)\right)}$$

en donde la conclusión de cada regla es una combinación lineal de los valores numéricos de entrada:

$$z_r = p_r x^* + q_r y^* + s_r$$

44

Tema 1.5 Sistemas difusos

- **Sistema difuso TSK mínimo (3/4)**

y los pesos se calculan igual que en el sistema difuso Mamdani mínimo:

$$w_r = \min\left(w_{xr}, w_{yr}\right) = \min\left(\mu_{A_r}(x^*), \mu_{B_r}(y^*)\right)$$

en donde por fusificación singletón:

$$w_{xr} = \max_x \left\{\min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A_r}(x)\right)\right\} = \mu_{A_r}(x^*)$$

$$w_{yr} = \max_y \left\{\min\left(\mu_{B'}(y), \mu_{B_r}(y)\right)\right\} = \mu_{B_r}(y^*)$$

45

- **Sistema difuso TSK mínimo (4/4)**