SubTemas

1.1 Introducción al control difuso
1.2 Teoría de conjuntos difusos
1.3 Representación del conocimiento
1.4 Razonamiento aproximado
1.5 Sistemas de inferencia difusos

Tema 1.4 Razonamiento Aproximado

Tópicos

- Razonamiento preciso y aproximado
- Modus-ponens (silogismo más común)
- Inferencia composicional
- Inferencia: base de una regla antecedente atómico
- Inferencia: base de una regla antecedente compuesto
- Inferencia: base de dos o más reglas
- Inferencia con reglas TSK

Lógica: Estudio de los métodos y principios del razonamiento

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Definición**

Razonamiento (preciso) en lógica clásica:

Obtener conclusiones (proposiciones precisas) a partir de un grupo de premisas (proposiciones precisas).

Las proposiciones son verdaderas (1) o falsas (0).

Razonamiento (aproximado) en lógica difusa:

Obtener conclusiones aproximadas (proposiciones difusas) a partir de un grupo de premisas aproximadas (proposiciones difusas). Las proposiciones son difusas, es decir, con un valor de verdad entre 0 y 1, inclusive.

3

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Modus ponens**

En lógica, modus ponendo ponens (en latín, modo que afirmando afirma), también llamado modus ponens, es una regla de inferencia que tiene la siguiente forma:

Si **A**, entonces **B**

A

Por lo tanto, **B**

Por ejemplo, un razonamiento que sigue la forma del modus ponens podría ser:

Si está soleado, entonces es de día.
Está soleado.
Por lo tanto, es de día.

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Modus ponens**

Lógica clásica:

Premisa 1:	x es A	(hecho)
Premisa 2:	si x es A, entonces y es B	(regla)
Conclusión:	y es B	(consecuencia)

Lógica difusa: (Modus ponens generalizado)

Premisa 1:	x es A’	(hecho)
Premisa 2:	si x es A, entonces y es B	(regla)
Conclusión:	y es B’	(consecuencia)

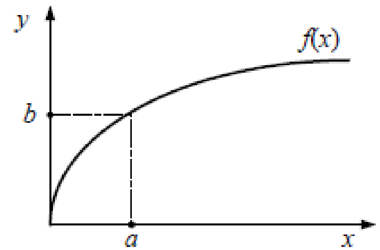
Mientras más cerca esté A’ de A, más cerca estará B’ de B

5

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Inferencia composicional**

Mecanismo básico de inferencia:

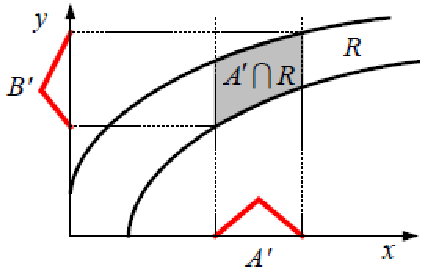


H:	x=a	(Hecho)
R:	y=f(x)	(Regla)
C:	y=f(a)=b	(Conclusión)

6

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Mecanismo de inferencia difusa**



H:	x es A′	(Hecho)
R:	si x es A, entonces y es B	(Regla)
C:	y es B′	(Conclusión)

Ojo: B´ es la composición de A´ y R : B´= A´o R

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Mecanismo de inferencia difusa**

Matemáticamente: Hecho: $\mu_{A'}(x)$

Regla: $\mu_R(x,y)$

Extensión: $\mu_{extA}(x,y)$

Intersección: $\mu_{A'\cap R}(x,y) = t\left[\mu_{extA'}(x,y), \mu_R(x,y)\right] = t\left[\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)\right]$

Proyección: $proy_y(\mu_{A'\cap R}(x,y)) = \max_x \left\{t\left[\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)\right]\right\}$

Conclusión: $\mu_{B'}(y) = \max_x \left\{t\left[\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)\right]\right\}$

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Ejemplo**

Inferencia difusa con modus-ponens generalizado, min para la norma-t e implicación local de Larsen (producto algebraico).

$$\mu_{B'}(y) = \max_x \left\{ \min\left[\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y) \right] \right\}$$

$$= \max_x \left\{ \min\left(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)\mu_B(y) \right) \right\}$$

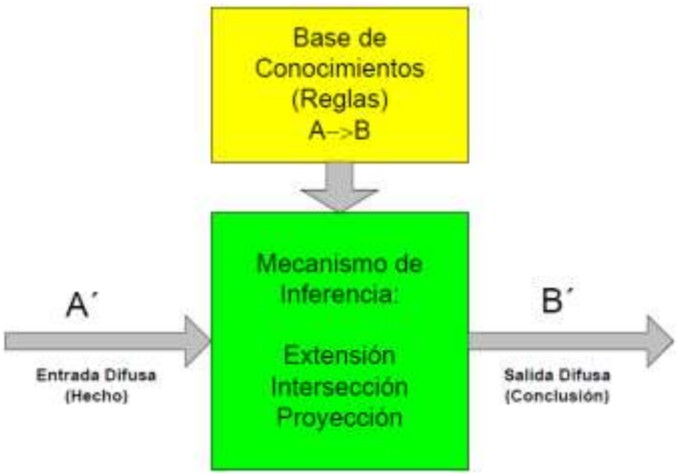
Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Ejemplo**

Inferencia difusa con modus-ponens generalizado, producto algebraico para la norma-t e implicación local de Larsen (producto algebraico).

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Sistema de inferencia**



Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Inferencia. Base con 1 regla, antecedente atómico

H: $x \text{ es } A'$

R: $\text{Si } x \text{ es } A, \text{ entonces } y \text{ es } B$

C: $y \text{ es } B'$

$$\mu_{B'}(y) = \max_x t\left[\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)\right] = \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A\to B}(x,y)\}$$

$$\mu_{B'}(y) = \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\}$$ para implicación local.

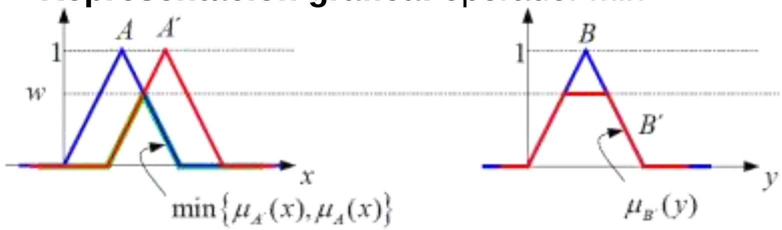
$$\mu_{B'}(y) = \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\} \wedge \mu_B(y) = w \wedge \mu_B(y)$$

en donde $w \triangleq \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\}$

es el grado de parecimiento de A´ a A, que es una medida del grado de creencia en el antecedente de la regla.

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- **Representación gráfica:** operador min



en donde:

$$w \triangleq \max_x \{\min\{\mu_{A'}(x), \mu_A(x)\}\}$$

$$\mu_{B'}(y) = \min\{w, \mu_B(y)\}$$

En forma compacta: $B' = A' \circ R$

13

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Inferencia. Base con 1 regla, antecedente compuesto

H: *x es A′ y y es B′*

R: *Si x es A y y es B, entonces z es C*

C: *z es C′*

$$\mu_{C'}(z) = \max_{x,y} t\left[\mu_{A'\cap B'}(x,y), \mu_R(x,y)\right] = \max_{x,y} \{\mu_{A'\cap B'}(x) \wedge \mu_{A\cap B \to C}(x,y)\}$$

$$\mu_{C'}(z) = \max_{x,y} \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)\} \quad \text{(imp. local)}$$

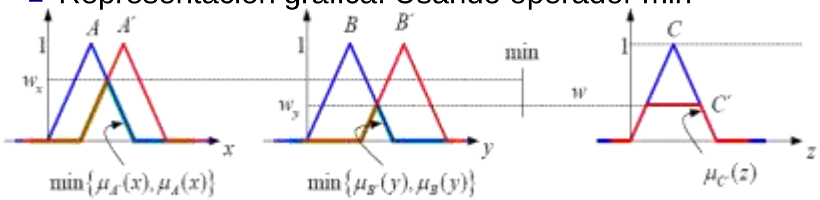
$$\mu_{C'}(z) = \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\} \wedge \max_y \{\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)\} \wedge \mu_C(z)$$

$$\mu_{C'}(z) = w_x \wedge w_y \wedge \mu_C(z) = w \wedge \mu_C(z) \qquad \text{con} \qquad w \triangleq w_x \wedge w_y$$

donde: $w_x \triangleq \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\}$, $w_y \triangleq \max_y \{\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)\}$

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Representación gráfica: Usando operador min



en donde:

$$w_x \triangleq \max_x \left\{ \min\left\{ \mu_{A'}(x), \mu_A(x) \right\} \right\} \qquad w_y \triangleq \max_y \left\{ \min\left\{ \mu_{B'}(y), \mu_B(y) \right\} \right\}$$

$$w = \min\left\{ w_x, w_y \right\} \quad \text{y} \quad \mu_{C'}(z) = \min\left\{ w, \mu_C(z) \right\}$$

En forma compacta: $C' = (A' \wedge B') \circ R$

15

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Inferencia. Base con 2 reglas, antecedente compuesto

H: $x \text{ es } A' \text{ y } y \text{ es } B'$

R1: $Si\ x \text{ es } A_1 \text{ y } y \text{ es } B_1, \text{ entonces } z \text{ es } C_1$

R2: $Si\ x \text{ es } A_2 \text{ y } y \text{ es } B_2, \text{ entonces } z \text{ es } C_2$

C: $z \text{ es } C'$

Cada regla determina una conclusión parcial y la conclusión total es la unión de las conclusiones parciales.

La conclusión de la primera regla es:

$$\begin{aligned}
\mu_{C_1'}(z) &= \max_{x,y} t\left[\mu_{A' \cap B'}(x,y), \mu_{R_1}(x,y) \right] \\
&= \max_{x,y} \left\{ \mu_{A' \cap B'}(x) \wedge \mu_{A_1 \cap B_1 \to C_1}(x,y) \right\} \\
&= \max_{x,y} \left\{ \mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_1}(y) \wedge \mu_{C_1}(z) \right\}
\end{aligned}$$

16

$$\mu_{C_1'}(z) = \max_x\left\{\mu_{A'}(x)\wedge\mu_{A_1}(x)\right\}\wedge\max_y\left\{\mu_{B'}(y)\wedge\mu_{B_1}(y)\right\}\wedge\mu_{C_1}(z)$$
$$= w_{1x}\wedge w_{1y}\wedge\mu_{C_1}(z)$$
$$= w_1\wedge\mu_{C_1}(z)$$

Similarmente, la conclusión de la segunda regla es:

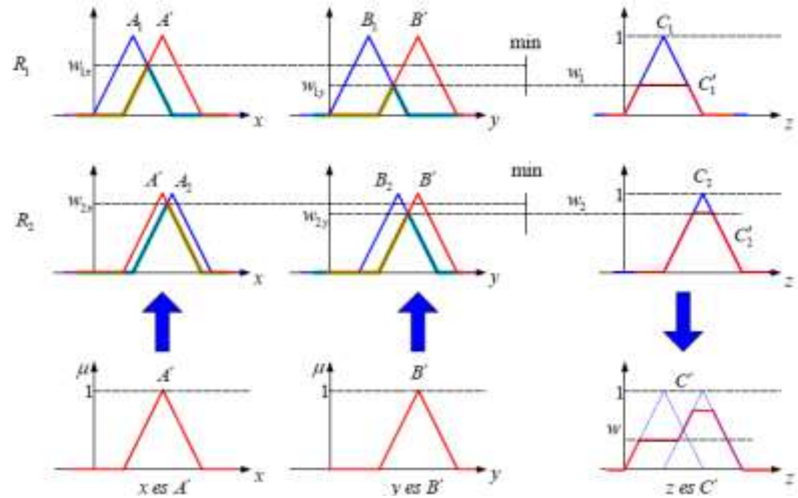
$$\mu_{C_2'}(z) = \max_x\left\{\mu_{A'}(x)\wedge\mu_{A_2}(x)\right\}\wedge\max_y\left\{\mu_{B'}(y)\wedge\mu_{B_2}(y)\right\}\wedge\mu_{C_2}(z)$$
$$= w_{2x}\wedge w_{2y}\wedge\mu_{C_2}(z)$$
$$= w_2\wedge\mu_{C_2}(z)$$

La conclusión total es:

$$\mu_{C'}(z) = \mu_{C_1'}(z)\cup\mu_{C_2'}(z)$$

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Representación gráfica (con min para intersección)



Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Sistemas de inferencia difuso tipo Sugeno o TSK

H: x *es* A' *y* y *es* B'

R1: *Si* x *es* A_1 *y* y *es* B_1, *entonces* $z_1 = p_1 x + q_1 y + r_1$

R2: *Si* x *es* A_2 *y* y *es* B_2, *entonces* $z_2 = p_2 x + q_2 y + r_2$

C: $z = \dfrac{w_1 z_1 + w_2 z_2}{w_1 + w_2}$

En donde:

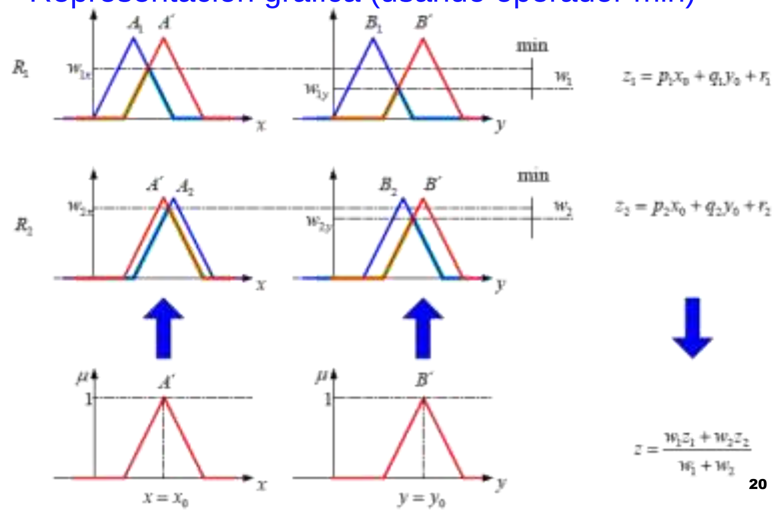
$$w_1 = \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_1}(x)\} \wedge \max_y \{\mu_{B'}(y) \wedge \mu_{B_1}(y)\}$$
$$= w_{1x} \wedge w_{1y}$$
$$w_2 = \max_x \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_2}(x)\} \wedge \max_y \{\mu_{B'}(y) \wedge \mu_{B_2}(y)\}$$
$$= w_{2x} \wedge w_{2y}$$

son los pesos o fuerza de disparo de las reglas.

19

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Representación gráfica (usando operador min)



20

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Inferencia con una base de conocimientos (múltiples reglas) y múltiples entradas

La combinación tipo **Mamdani** interpreta las reglas como enunciados condicionales independientes y la base de reglas como la unión de todas las reglas:

$$R = \bigcup_{i=1}^{M} R_i$$

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

- Inferencia con una base de conocimientos (múltiples reglas) y múltiples entradas

En general, la conclusión se obtiene mediante la composición de los hechos de entrada y la base de conocimientos:

$$C' = X' \circ R$$

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

Por conveniencia, la conclusión total C´ puede obtenerse regla por regla:

$$C' = \bigcap_{j=1}^{N} X'_j \circ \bigcup_{i=1}^{M} R_i$$
$$= (X'_1 \cap X'_2 \cap \cdots \cap X'_N) \circ (R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_M)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{M} (X'_1 \cap X'_2 \cap \cdots \cap X'_N) \circ R_i$$
$$= \bigcup_{i=1}^{M} C'_i = C'_1 \cup C'_2 \cup C'_3 \cup \cdots \cup C'_M$$

en donde: $C'_i = (X'_1 \cap X'_2 \cap \cdots \cap X'_N) \circ R_i$ para $i = 1, 2, \cdots, M$

es la conclusión de la i-esima regla.

Tema 1.4 Razonamiento aproximado

Ejemplo. Obtener la función de pertenencia de la conclusión total generada por un sistema difuso con dos variables lingüísticas de entrada y nueve reglas.

(Alumnos resolverán en clase)