Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

Tópicos

- Conjuntos clásicos
- Conjuntos difusos
- Conjuntos difusos más comunes
- Operaciones con conjuntos difusos
- Complemento de un conjunto difuso
- Unión de conjuntos difusos
- Intersección de conjuntos difusos
- Relaciones difusas
- Funciones de pertenencia 2D
- Principio de extensión
- Composiciones difusas

1

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Recuento de los daños**

Hasta ahora hemos visto tres operadores difusos: complemento, intersección y unión. Existen otros enfoques sobre estos operadores, que se expondrán brevemente antes de continuar con lo siguientes temas (relaciones difusas).

2

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Funciones que califican como complementos difusos**

Definición básica: $c[\mu_A(x)] = 1 - \mu_A(x)$ o $c[a] = 1 - a$

Clase Sugeno: $c_\lambda(a) = \dfrac{1-a}{1+\lambda a}$ donde $\lambda \in (-1, \infty)$

$\lambda = 0 \Rightarrow$ definición básica.

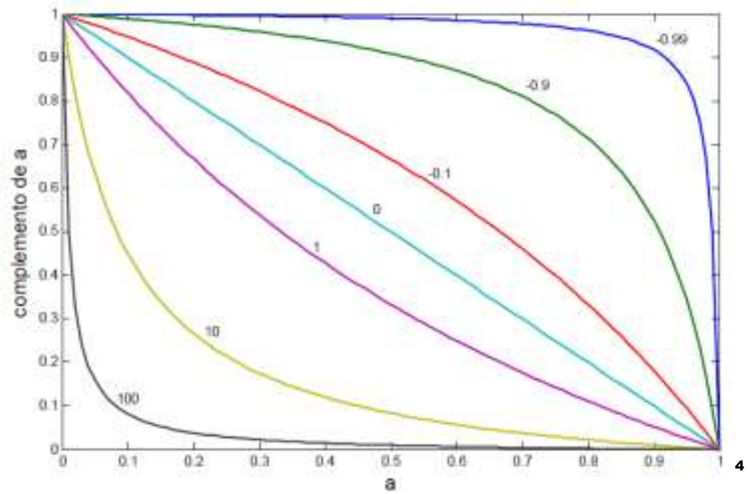
Clase Yager: $c_w(a) = (1 - a^w)^{1/w}$ donde $w \in (0, \infty)$

$w = 1 \Rightarrow$ definición básica.

3

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

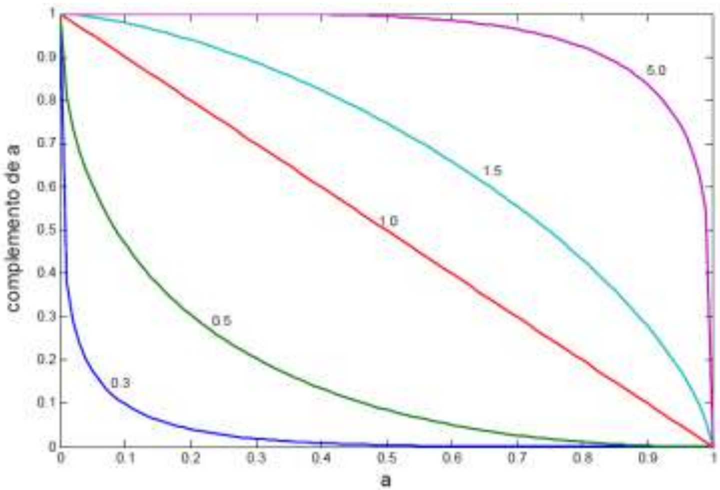
- **Complementos clase SUGENO**



4

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Complementos clase YAGER**



5

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Funciones que califican como uniones difusas** (1/2)

Definición básica: $s(a,b) = \max(a,b)$ (Clase Zadeh)

Clase Dombi:

$$s_\lambda(a,b) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{-1/\lambda}}$$

donde $\lambda \in (0, \infty)$

Clase Dubois-Padre:

$$s_\alpha(a,b) = \frac{a + b - ab - \min(a, b, 1-\alpha)}{\max(1-a, 1-b, \alpha)}$$

donde $\alpha \in [0,1]$

6

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Funciones que califican como uniones difusas** (2/2)

Clase Yager: $s_w(a,b)=\min\left(1,(a^w+b^w)^{1/w}\right)$ donde $w\in(0,\infty)$

Suma drástica: $s_{ds}(a,b)=\begin{cases} a & si\ b=0 \\ b & si\ a=0 \\ 1 & en\ otro\ caso \end{cases}$

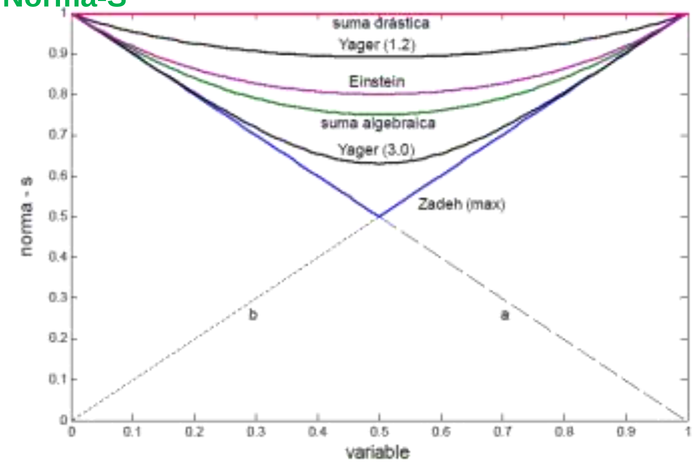
Suma Einstein: $s_{es}(a,b)=\dfrac{a+b}{1+ab}$

Suma algebraica: $s_{as}(a,b)=a+b-ab$

7

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Norma-S**



$\max(a,b)\le s(a,b)\le s_{ds}(a,b)$

8

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Funciones que califican como intersecciones difusas**

Definición básica: $t(a,b)=\min(a,b)$ (Clase Zadeh)

Clase Dombi: $t_\lambda(a,b)=\dfrac{1}{1+\left[\left(\dfrac{1}{a}-1\right)^\lambda+\left(\dfrac{1}{b}-1\right)^\lambda\right]^{1/\lambda}}$

donde $\lambda\in(0,\infty)$

Clase Dubois-Padre: $t_\alpha(a,b)=\dfrac{ab}{\max(a,b,\alpha)}$ donde $\alpha\in[0,1]$

9

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Funciones que califican como intersecciones difusas**

Clase Yager: $t_w(a,b)=1-\min\left(1,((1-a)^w+(1-b)^w)^{1/w}\right)$

donde $w\in(0,\infty)$

Producto drástico: $t_{dp}(a,b)=\begin{cases} a & si\ b=1 \\ b & si\ a=1 \\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$

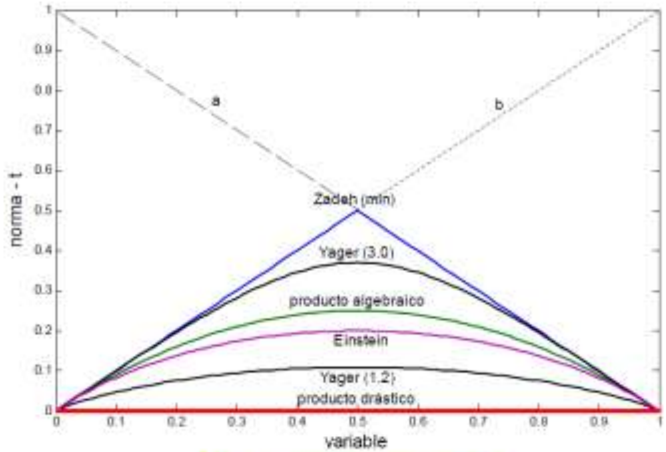
Producto Einstein: $t_{ep}(a,b)=\dfrac{ab}{2-(a+b-ab)}$

Producto algebraico: $t_{ap}(a,b)=ab$

10

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Norma-T**



$$t_{dp}(a,b) \leq t(a,b) \leq \min(a,b)$$

11

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **RELACIONES DIFUSAS**

Producto Cartesiano

Sean X y Y dos conjuntos ordinarios arbitrarios. El producto Cartesiano de X y Y, denotado por X×Y, es el conjunto ordinario de todos los pares ordenados (x,y) formados con todos elementos *x* pertenecientes a X y, *y* pertenecientes a Y :

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X \text{ y } y \in Y\}$$

12

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **RELACIÓN**

Una relación (binaria) **R** entre los conjuntos X y Y, R(X,Y), es un subconjunto del producto Cartesiano X x Y, R $\subseteq$ X×Y que establece una interacción entre los elementos de X y Y. La relación puede representarse mediante una función de pertenencia:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ (x,y) \in R(x,y) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Una relación binaria con un número finito de elementos también puede representarse mediante una matriz relacional.

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Ejemplo: Sean X = {1,2,3} y Y = {2,3,4}.**

El producto Cartesiano **X×Y** es:

X ×Y = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)}

La relación binaria x es non y y es par es el conjunto:

R(X ,Y) = {(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)}

con matriz relacional:

		Y		
		2	3	4
X	1	1	0	1
	2	0	0	0
	3	1	0	1

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Relación difusa**

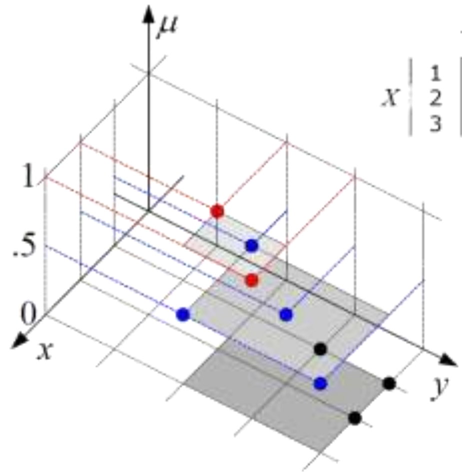
Una relación binaria ***R*** es difusa cuando los elementos, (x,y), de la relación tienen grados de pertenencia, $\mu_R(x,y)$, en el intervalo [0,1], esto es, cuando la interacción entre los elementos de X y Y puede describirse convenientemente en forma difusa:

$$R = \left\{ \mu_R(x,y)/(x,y) \;\middle|\; (x,y) \in X \times Y,\ \mu_R(x,y) \in [0,1] \right\}$$

Una relación binaria difusa con un número finito de elementos puede representarse mediante una matriz relacional difusa.

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Ejemplo** **Relación "la diferencia entre x y y es pequeña"**

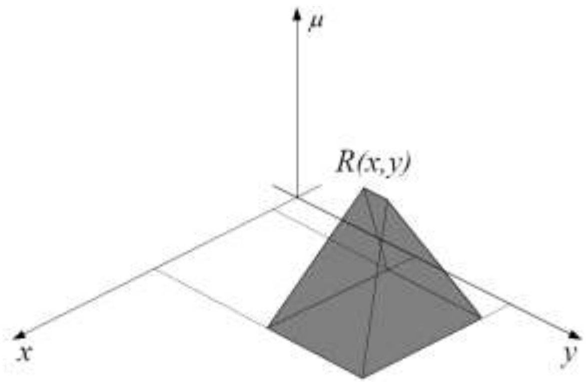


X \ Y	2	3	4
1	0.5	0	0
2	1	0.5	0
3	0.5	1	0.5

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Función de pertenencia 2D**

Una relación binaria difusa define un conjunto difuso bidimensional (2D) con función de pertenencia 2D:



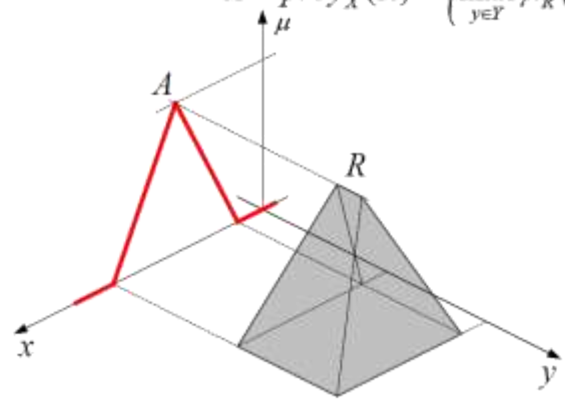
17

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Proyección de un conjunto difuso 2D**

Proyección de R en X :

$$A = proy_X(R) = \left\{ \max_{y \in Y} \mu_R(x,y) / x \mid x \in X \right\}$$



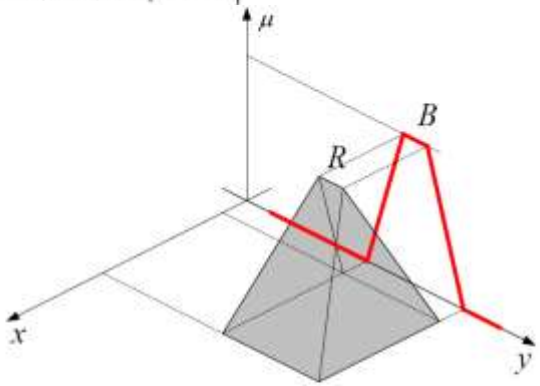
18

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Proyección de un conjunto difuso 2D**

Proyección de R en Y :

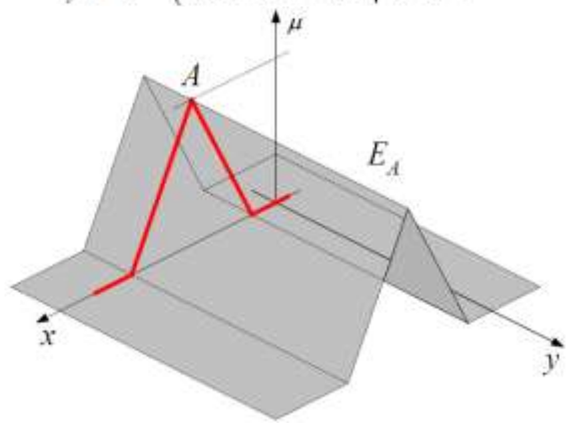
$$B = proy_Y(R) = \left\{ \max_{x \in X} \mu_R(x,y)/y \mid y \in Y \right\}$$



Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Extensión 2D de un conjunto difuso**

$$E_A = ext_y(A) = \left\{ \mu_A(x)/(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y \right\}$$

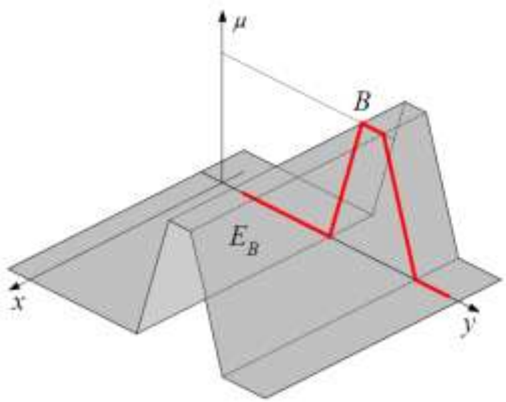


20

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Extensión 2D de un conjunto difuso**

$$E_B = ext_x(B) = \left\{ \mu_B(y)/(x,y) \,\middle|\, (x,y) \in X \times Y \right\}$$

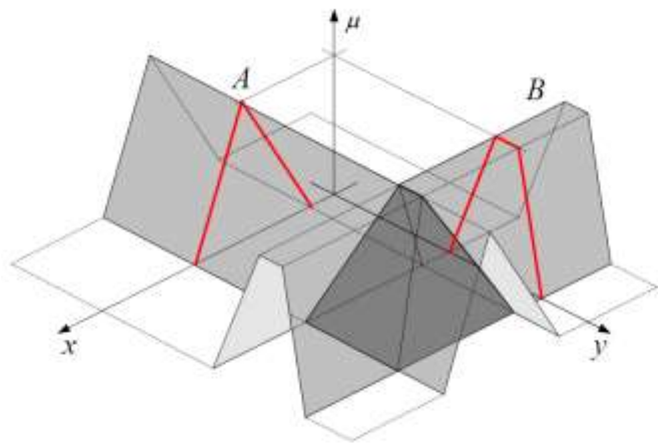


21

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Intersección**

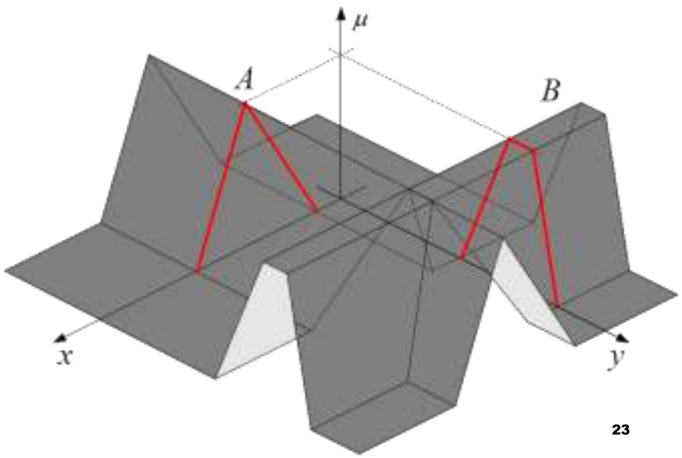
$$A \cap B = \min_{x,y}(A,B) = \min_{x,y}\left(ext_y(A), ext_x(B)\right) = ext_y(A) \cap ext_x(B)$$



22

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Unión** $A \cup B = \max_{x,y}(A,B) = \max_{x,y}\left(ext_y(A), ext_x(B)\right) = ext_y(A) \cup ext_x(B)$



Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Principio de extensión**

La imagen de un conjunto difuso A, definido en X, inducido por una relación difusa R, definida en X×Y, es un conjunto difuso B, definido en Y, determinado por la composición de A y R:

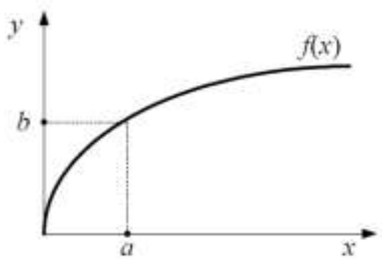
$$B = A \circ R = proy_y\left(ext_y(A) \cap R\right)$$

Proceso análogo al de la evaluación de una función ordinaria, pero usando una relación y conjuntos difusos.

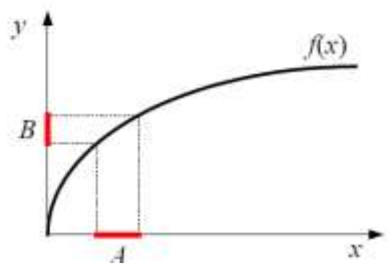
Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Composición de una función ordinaria**

Argumento ordinario



Argumento intervalo

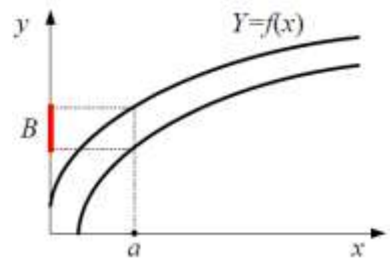


25

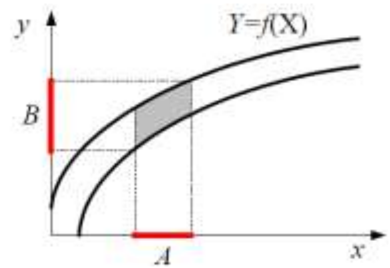
Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Composición con una función de intervalos**

Argumento ordinario



Argumento intervalo

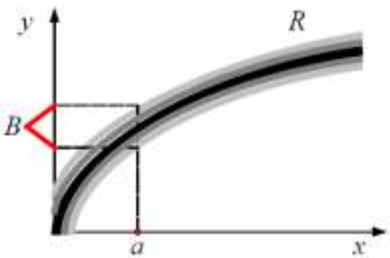


26

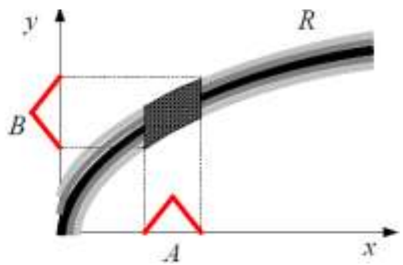
Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Composición de una relación difusa**

Argumento ordinario



Argumento difuso



27

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Composición difusa**

Sea B un conjunto difuso definido en Y, inducido por la composición del conjunto difuso A definido en X y la relación difusa R definida en X×Y, esto es:

$$B = A \circ R = proy_y\left(ext_y(A) \bigcap R\right)$$

Existen dos composiciones básicas:

MAX-min

MAX-producto

28

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Composición max-producto**

Considerando el producto algebraico para la intersección y el operador max de la proyección:

$$\mu_B(y) = \max_x \left(\mu_A(x) \mu_R(x,y) \right)$$

29

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Composición max-min**

Considerando el operador min para la intersección y el operador max de la proyección:

$$\mu_B(y) = \max_x \min_{x,y} \left(\mu_A(x), \mu_R(x,y) \right)$$
$$= \max_x \min_x \left(\mu_A(x), \mu_R(x,y) \right) \quad \forall\, y$$

Ojo:

La composición max-min es posiblemente la más utilizada pero no favorece el análisis matemático, para lo cual se usa la composición max-producto.

30

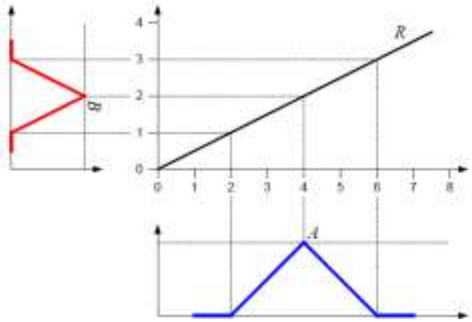
Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

- **Ejemplo**

Sean $A = triang(x; 2, 4, 6)$ y $R = \{1/(x,y) \,|\, y = 0.5x\}$

¿Cuál es la imagen B de A inducida por R ?

$$B = A \circ R = proy_y(ext_y(A) \bigcap R)$$



31

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

Usando la composición max-min:

x	y	$\mu_A(x)$	$\mu_R(x,y)$	$\min_{x,y}(\bullet,\bullet)$	$\mu_B(y)$
0	0	0	1.0	0	0
1	0.50	0	1.0	0	0
1.5	0.75	0.5	1.0	0.5	0.5
2.0	1.00	1.0	1.0	1.0	1.0
2.5	1.25	0.5	1.0	0.5	0.5
3	1.50	0	1.0	0	0
4	2.00	0	1.0	0	0

32

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

x	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0.5	1.0	0.5	0	0

Otra Forma:

	R	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
	1	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0	0
	3	0	0	1	0	0	0	0
x	4	0	0	0	1	0	0	0
	5	0	0	0	0	1	0	0
	6	0	0	0	0	0	1	0
	7	0	0	0	0	0	0	1

(y over the columns 0.5–3.5)

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

$B = A \circ R$

$$= (0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0)$$

La composición max-min puede obtenerse como un producto matricial en donde cada multiplicación debe tratarse como una operación min y cada suma como una max.

34