




SubTemas

- 1.1 Introducción al control difuso
- 1.2 Teoría de conjuntos difusos
- 1.3 Representación del conocimiento
- 1.4 Razonamiento aproximado
- 1.5 Sistemas de inferencia difusos

1



Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

Tópicos

- Conjuntos clásicos
- Conjuntos difusos
- Conjuntos difusos más comunes
- Operaciones con conjuntos difusos
- Complemento de un conjunto difuso
- Unión de conjuntos difusos
- Intersección de conjuntos difusos
- Relaciones difusas
- Funciones de pertenencia 2D
- Principio de extensión
- Composiciones difusas

2

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Conjunto clásico

Colección de objetos con una propiedad común.

Ejemplos:

Números naturales mayores que 2 y menores que 10:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Círculo unitario en el plano complejo:

$$A = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$$

Línea en \mathbb{R}^2

$$A = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0, a, b, c, x, y \in \mathbb{R}\}$$

3

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Representación de conjuntos

Enumeración de elementos: $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Definición de una propiedad: $A = \{x \in X \mid x \text{ tiene la propiedad } P\}$

Función de pertenencia: $\mu_A(x) : X \rightarrow \{0, 1\}$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ es miembro de } A \\ 0 & x \text{ no es miembro de } A \end{cases}$$

4

MC Enrique Martinez Peña

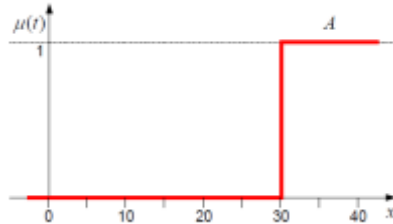
Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Conjunto clásico

Está caracterizado por una función que asigna un grado de pertenencia 0 (no pertenece) o 1 (pertenece) a los elementos del universo (de discurso) de la variable.

Ejemplo:

Conjunto de temperaturas altas $A = \{ t \mid t \geq 30 \}$

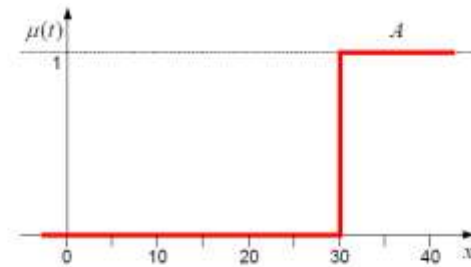


5

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Proposiciones lógicas

“La temperatura es alta.” ... verdadero o falso



Temperatura: $t_{\text{hoy}} = 30$ $\mu_A(30) = 1$ (verdadero)
 $t_{\text{ayer}} = 29.5$ $\mu_A(29.5) = 0$ (falso)

6

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Ventajas y desventajas

Los conjuntos clásicos son adecuados para representar conceptos bien definidos (matemáticas, programas, etc.).

Los conjuntos clásicos son menos adecuados para representar el conocimiento común en términos de conceptos vagos tales como:

- Persona alta, camino resbaloso, clima agradable, ...
- Comprar un auto grande con consumo moderado.
- Si la temperatura es muy baja, incrementa la calefacción.

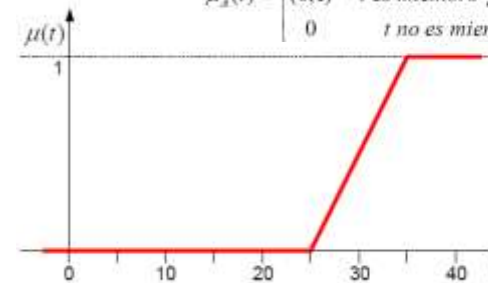
7

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Conjuntos difusos

Caracterizado por una función que asigna un grado de pertenencia entre 0 y 1, inclusive, a los elementos del universo (de discurso) de la variable.

Temperatura alta

$$\mu_A(t) = \begin{cases} 1 & t \text{ es miembro completo de } A & (t \geq 35) \\ (0,1) & t \text{ es miembro parcial de } A & (25 < t < 35) \\ 0 & t \text{ no es miembro de } A & (t \leq 25) \end{cases}$$


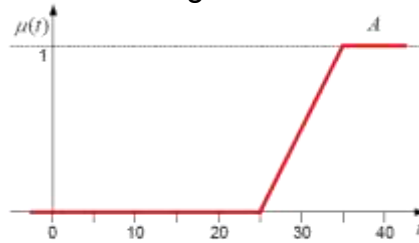
8

MC Enrique Martinez Peña

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Proposiciones lógicas

“La temperatura es alta” ... grado de verdad

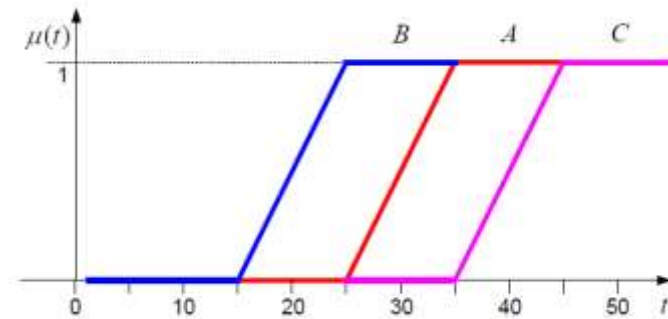


Temperatura:	$t_{\text{hoy}} = 30$	$\mu_A(30) = 0.5$
	$t_{\text{ayer}} = 29.5$	$\mu_A(29.5) = 0.45$
	$t_{\text{antier}} = 20$	$\mu_A(20) = 0$
	$t_{\text{mañana}} = 40$	$\mu_A(40) = 1$

9

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Subjetividad y dependencia del contexto



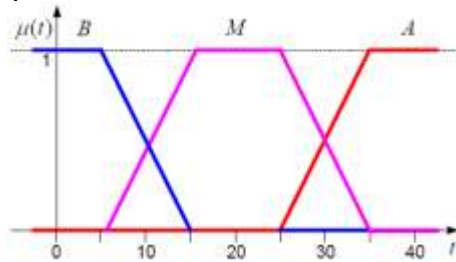
- A temperatura alta en Cuernavaca
- B temperatura alta en Toluca
- C temperatura alta en Monterrey

10

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Variables lingüísticas

Temperatura ambiente de Cuernavaca



Valores lingüísticos:

temperatura alta: A
 temperatura media: M
 temperatura baja: B

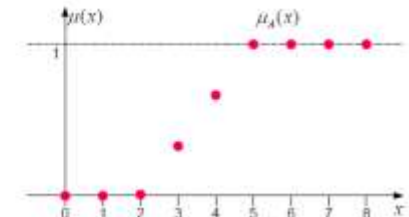
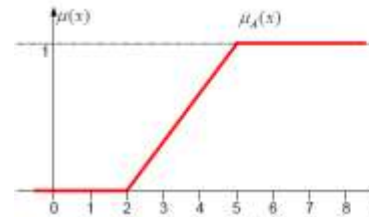
11

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Algunas definiciones

Conjunto difuso continuo. La variable base es continua.

Conjunto difuso discreto. La variable base es discreta.



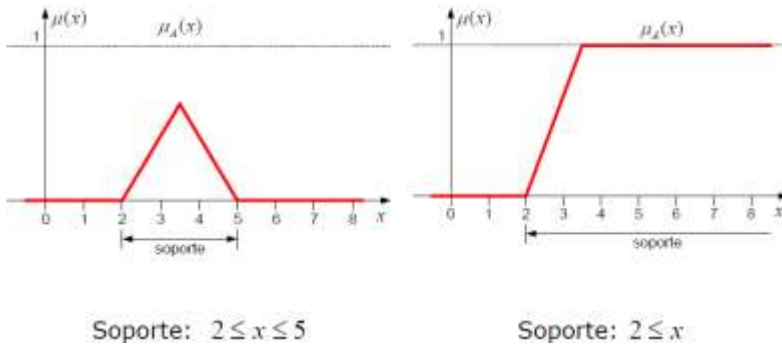
12

MC Enrique Martinez Peña

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Soporte de un conjunto difuso

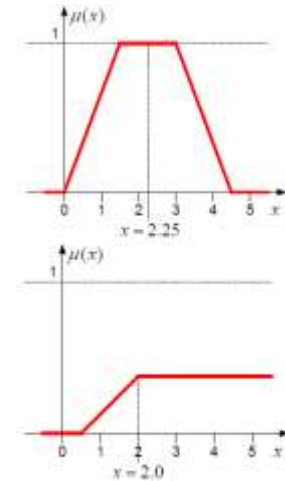
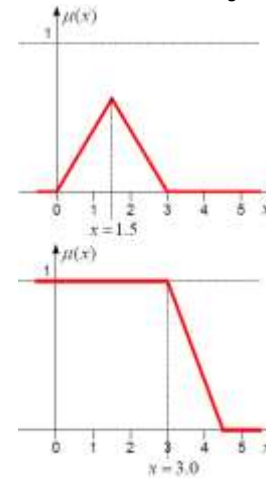
Formado por todos los elementos del universo de discurso con grado de pertenencia no cero.



13

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Centro de conjunto difuso



14

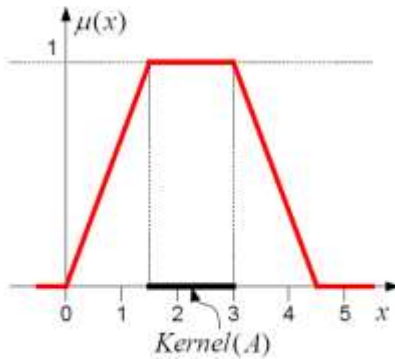
MC Enrique Martinez Peña

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Kernel de un conjunto difuso

El kernel es un conjunto ordinario

$$\text{Kernel}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 1\}$$

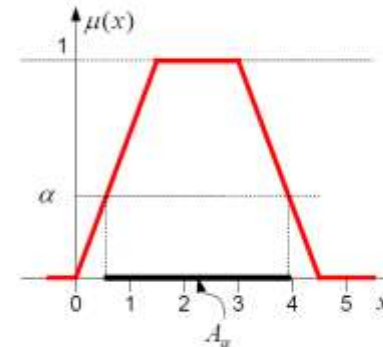


15

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ α -corte de un conjunto difuso

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\} \quad \text{o} \quad A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$



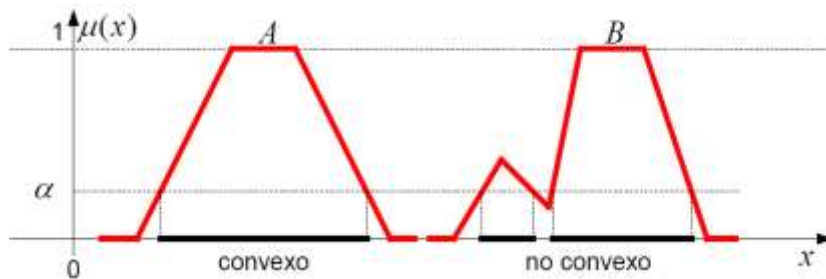
A_α es un conjunto ordinario

16

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Conjunto difuso convexo

El conjunto difuso A es convexo si y sólo si todos sus α -cortes son convexos.



17

Conjuntos difusos (Fuzzy Sets)

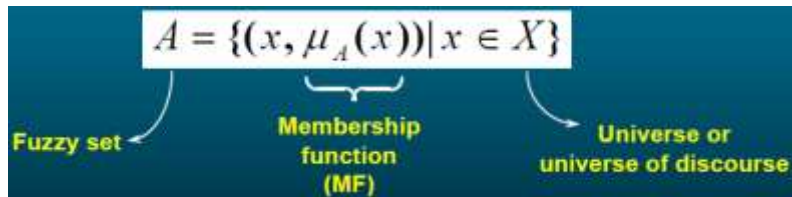
Los mas comunes

Sus funciones de pertenencia (Membership Function) son continuas, convexas y normales

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Definición formal

A fuzzy set A in X is expressed as a set of ordered pairs:



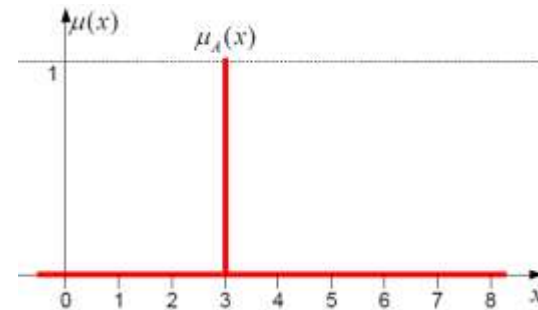
A fuzzy set is totally characterized by a **membership function (MF)**.

19

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Conjunto difuso singleton

Su función de pertenencia es un pulso unitario. El grado de pertenencia es no cero en sólo un elemento del universo de discurso de la variable base.

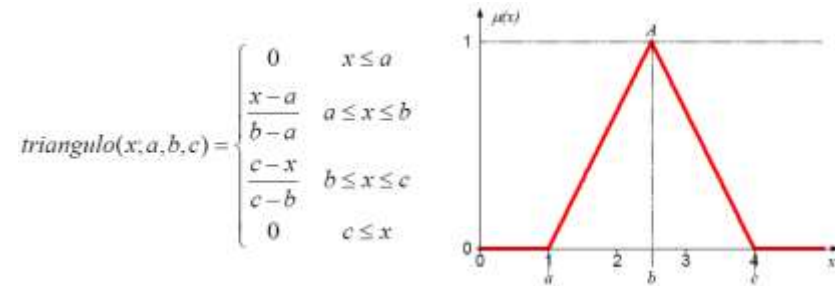


20

MC Enrique Martinez Peña

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ MF Triangular

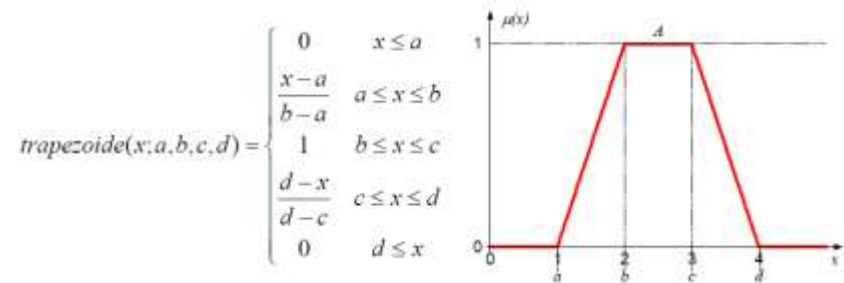


$$\text{triangulo}(x; a, b, c) = \max\left(0, \min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right)\right)$$

21

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ MF Trapezoidal



$$\text{trapezoide}(x; a, b, c, d) = \max\left(0, \min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right)\right), \quad a < b < c < d$$

22

MC Enrique Martinez Peña

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

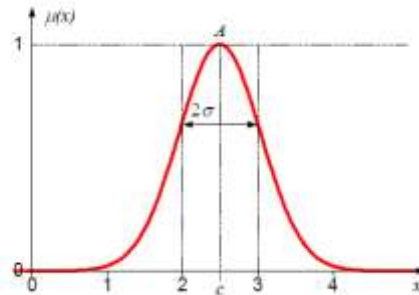
■ MF Gaussiana

$$\text{gausiana}(x; c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2}$$

Parámetros

Centro: $c = 2.5$

Anchura (varianza): $\sigma = 0.5$



23

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ MF Campana Generalizada

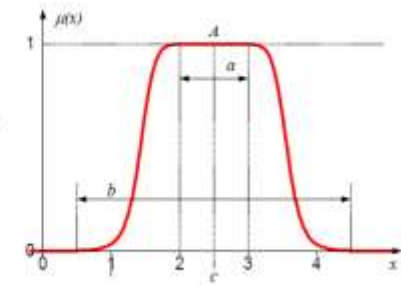
$$\text{campana}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}, \quad b > 0$$

Parámetros

Centro: $c = 2.5$

Anchura (hombros): $a = 1$

Anchura (base): $b = 4$



24

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Operaciones con conjuntos difusos

Motivación:

Las proposiciones, reglas y silogismos pueden representarse como relaciones u operaciones entre conjuntos difusos, con las cuales puede obtenerse un conjunto difuso resultante que las represente.



25

■ Silogismo

Es una forma de razonamiento deductivo que consta de dos proposiciones como premisas (ANTECEDENTE) y otra como conclusión (CONSECUENTE), siendo la última una inferencia necesariamente deductiva de las otras dos.

Consideremos el siguiente silogismo:

Todos los caballos tienen huesos
 Rocinante es un caballo
 Por tanto, Rocinante tiene huesos

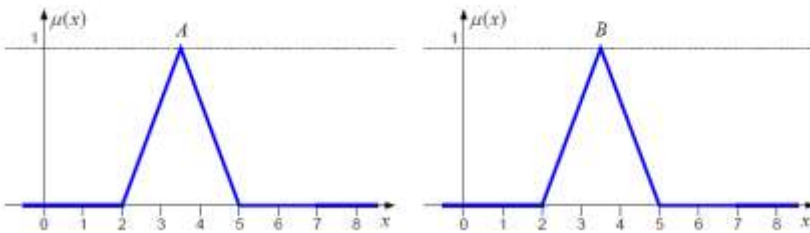
26

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Definiciones básicas

Sean A y B dos conjuntos difusos definidos en el mismo universo de discurso U :

- A y B son iguales, $A = B$, si y sólo si $\mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in U$

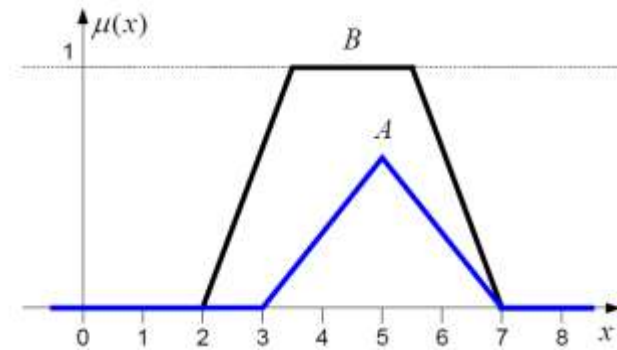


27

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Definiciones básicas

- B contiene a A , $A \subseteq B$, si y sólo si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in U$

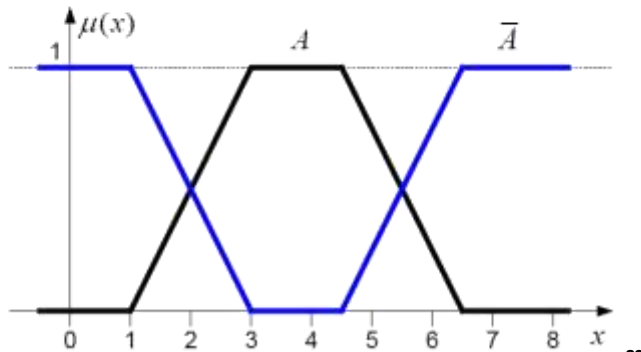


28

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Definiciones básicas

- Complemento de A es el conjunto \bar{A} tal que $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$



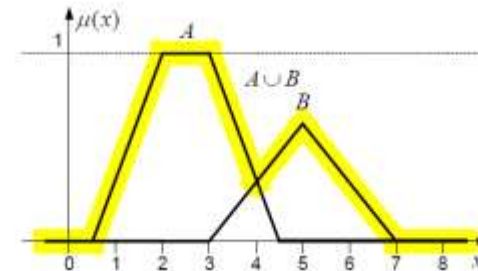
29

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Unión difusa (norma-s)

- La unión de A y B es el conjunto $A \cup B$ tal que:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (\text{definición básica o Zadeh})$$



Otra definición:

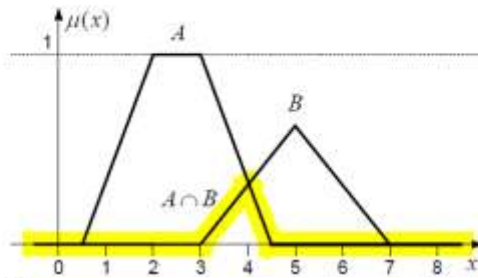
$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \quad (\text{suma algebraica})$$

Tema 1.2 Teoría de conjuntos difusos

■ Intersección difusa (norma-t)

- La intersección de A y B es el conjunto $A \cap B$ tal que:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (\text{definición básica o Zadeh})$$



Otra definición:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x) \quad (\text{producto algebraico})$$