



# Comentarios finales, sintonización, realización de filtros digitales

## Tarea 3.2

Asignatura: Control Digital

Catedrático: Dr. Yahir Hernández Mier

Alumno: Ángel Arturo Ramírez Suárez

Ingeniería mecatrónica 8-1

Fecha: 20 de febrero de 2013

Ciudad Victoria, Tamaulipas.

## **Resumen**

En este documento se presentan los resultados de los resúmenes e investigaciones realizados del libro Sistemas de Control en Tiempo Discreto de Katsuhiko Ogata.

Alumno: Angel Arturo Ramirez Suarez  
Grupo: IM 8-2

### TAREA 3 - Comentarios.

28/Febrero/2013

Los controladores PID para los sistemas de control de procesos como sistemas de control de temperatura, sistemas de control de presión y sistemas de control de nivel de líquidos se sintonizan normalmente en forma experimental. De hecho, en el control PID de cualquier planta industrial donde su dinámica no es bien conocida o no está bien definida, las variables del controlador ( $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ ) se deben determinar en forma experimental.

De hecho, dicha manera de determinar los parámetros o sintonizarlos se puede llevar a cabo mediante cambios de tipo escalón en la señal de referencia o de perturbación. Se dispone de unos cuantos procedimientos establecidos para dicho propósito. Básicamente la sintonización (el determinar los parámetros  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ ) se logra mediante la variación sistemática de los valores hasta lograr buenas características de respuesta.

Para los controladores PID digitales utilizados para sistemas de control de procesos, el periodo de muestreo se debe elegir de manera apropiada. Muchos sistemas de control de procesos tienen constantes de tiempo ligeramente grandes. Una receta de cocina en la elección del periodo de muestreo es (el periodo de muestreo  $T = 2\pi/\omega$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de muestreo) en sistemas para control de procesos, para sistemas de control de temperatura el periodo de muestreo debe ser de 10 a 30 segundos, para sistemas de control de presión de 1 a 5 segundos y para sistemas de control de nivel de líquidos de 1 a 10 segundos.

#### • Obtención de la respuesta entre instantes de muestreo consecutivos.

El análisis de la transformada Z no dará información sobre la respuesta entre dos instantes de muestreo consecutivos. En casos ordinarios esto no es serio debido a que si el teorema de muestreo se satisface, entonces la salida no variará mucho entre cualquiera de estos dos instantes de muestreo consecutivos. En ciertos casos, sin embargo, se puede necesitar la respuesta entre instantes de muestreo consecutivos.

Se dispone de tres métodos de uso común que permiten conocer la respuesta entre dos instantes de muestreo consecutivos:

- 1.- El método de la transformada de Laplace.
- 2.- El método de la transformada Z modificada.
- 3.- El método en el espacio de estados.

Aquí se estudiará brevemente el método de la transformada de Laplace. El método de la transformada de Laplace estudiada aquí, la transformada Z modificada se presenta en el apéndice B. El método del espacio de estados se estudiará en la sección 5-5.

#### - El método de la Transformada de Laplace.

Considere, por ejemplo, el sistema que se muestra en la figura 1. La salida  $C(s)$  se puede dar mediante:

$$C(s) = G(s)E^*(s) = G(s) \frac{R^*(s)}{1+GH^*(s)}$$

de este modo:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s) \frac{R^*(s)}{1+GH^*(s)}\right]$$

TAREA 3 - Método de Ziegler-Nichols.

18/Febrero/2013

El método de Ziegler-Nichols es un método heurístico para sintonizar un controlador PID. Fue desarrollado por John G. Ziegler y Nathaniel B. Nichols y realizado al establecer las ganancias integrales y derivativas en cero. La ganancia proporcional ( $K_p$ ) es incrementada desde cero hasta que alcanza la ganancia máxima  $K_M$  en el cual la salida del control oscila con amplitud constante.  $K_M$  y el periodo de oscilación  $T_M$  son utilizados para ajustar las ganancias  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  de acuerdo al tipo de controlador usado:

Tipo de control	$K_p$	$K_i$	$K_d$
P	$K_M/2$	-	-
PI	$K_M/2.2$	$1.2K_p/T_M$	
PID clásico	$0.60K_M$	$2K_p/T_M$	$K_p T_M/8$
Regla integral Pessen	$0.7K_M$	$2.5K_p/T_M$	$0.15K_p T_M$
Con sobretiro	$0.33K_M$	$2K_p/T_M$	$K_p T_M/3$
Sin sobretiro	$0.2K_M$	$2K_p/T_M$	$K_p T_M/3$

Tabla 1. Ajustes de Ziegler-Nichols.

Es importante saber cuál es la estructura (estándar, serie o paralelo) del PID al que se aplica el ajuste propuesto por Ziegler-Nichols. Existe cierta controversia respecto a cuál fue la estructura originalmente usada por Ziegler y Nichols.

Desempeño con el método de oscilación de Ziegler-Nichols.

Notar que el modelo intrínsecamente obtenido en el experimento es sólo un punto de la respuesta en frecuencia, que corresponde a fase  $-180^\circ$  y magnitud  $K_c^{-1}$ , dado que el diagrama de Nyquist cruza el punto  $(-1, 0)$  cuando  $K_p = K_c$ .

Para analizar el efecto del ajuste de control proporcionado por el método de Ziegler-Nichols consideramos una planta general con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K_0 e^{-sT_0}}{Y_0 s + 1}; \quad Y_0 > 0 \quad (1)$$

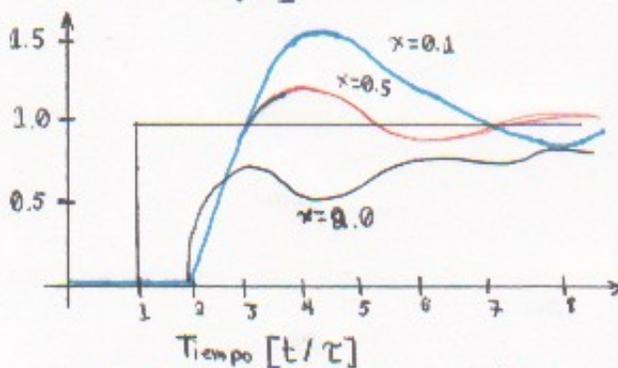


Figura 1. Respuesta a lazo cerrado de la planta con PID ajustado mediante el método de oscilación de Ziegler-Nichols.

La Figura 1 representa la respuesta del lazo cerrado con un controlador PID ajustado mediante el método de oscilación de Ziegler-Nichols para distintos valores de  $x = T_0/Y_0$ . El eje de tiempos se representa normalizado en unidades de  $t/T_0$ .

Si el ajuste es muy sensible al cociente  $T_0/Y_0$  se requiere forzar la planta a oscilar, lo cual puede ser peligroso o inconveniente en muchos casos.

### • Método de la curva de reacción de Ziegler-Nichols.

Muchas plantas en la práctica pueden describirse satisfactoriamente con un modelo de la forma (1). Una versión linealizada cuantitativa de este modelo puede obtenerse mediante un experimento a lazo abierto con el siguiente procedimiento:

- 1.- Llevar manualmente la planta a lazo abierto a un punto de operación normal manipulado  $u(t)$ . Supongamos que la planta se estabiliza en  $y(t) = y_0$  para  $u(t) = M_0$ .
- 2.- En un instante inicial  $t_0$  aplicar un cambio escalón en la entrada de  $M_0$  a  $M_{00}$  (el salto debe ser entre un 10 a 20% del valor nominal).
- 3.- Registrar la respuesta de la salida hasta que se estabilice en el nuevo punto de operación. La Figura 2 muestra una curva típica.
- 4.- Calcular los parámetros del modelo (1) de las fórmulas:

$$K_0 = \frac{y_{00} - y_0}{M_{00} - M_0}; \quad T_0 = t_2 - t_0; \quad \gamma_0 = t_2 - t_1$$

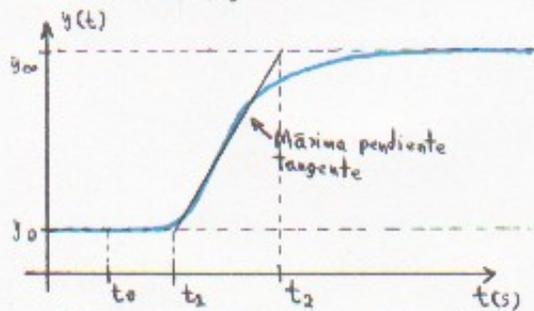


Figura 2. Respuesta al escalón (curva de reacción) en lazo abierto de la planta.

Los parámetros del controlador PID propuestos por Ziegler y Nichols a partir de la curva de reacción se determinan de la tabla 2.

	$K_p$	$T_r$	$T_d$
P	$\frac{\gamma_0}{K_0 T_0}$		
PI	$\frac{0.9 \gamma_0}{K_0 T_0}$	$3 T_0$	
PID	$\frac{1.2 \gamma_0}{K_0 T_0}$	$2 T_0$	$0.5 T_0$

Tabla 2. Parámetros de controladores PID según el método de Ziegler-Nichols.

• Método de la curva de reacción de Cohen-Coon.

El ajuste de Ziegler-Nichols para la curva de reacción es muy sensible a variaciones de  $T/\tau_0$ . Cohen y Coon desarrollaron una tabla modificada para mejorar esta limitación usando datos del mismo ensayo.

	$K_p$	$T_r$	$T_i$
P	$\frac{Y_0}{K_0 \tau_0} \left(1 + \frac{\tau_0}{3Y_0}\right)$		
PI	$\frac{Y_0}{K_0 \tau_0} \left(0.9 + \frac{\tau_0}{12Y_0}\right)$	$\frac{\tau_0 (30Y_0 + 3\tau_0)}{9Y_0 + 20\tau_0}$	
PID	$\frac{Y_0}{K_0 \tau_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{\tau_0}{4Y_0}\right)$	$\frac{\tau_0 (30Y_0 + 6\tau_0)}{13Y_0 + 8\tau_0}$	$\frac{4\tau_0 K_0}{11Y_0 + 2\tau_0}$

Alumno: Ángel Arturo Ramírez Suárez  
Grupo: IM 8-1

18/Febrero/2013

### TAREA 3 - Resumen.

#### Realización de controladores y filtros digitales.

Un filtro digital procesa una señal de entrada rechazando las frecuencias no deseadas. Un controlador digital es un filtro digital que no permite retardos mientras que los filtros digitales permiten retrasos a cambio de una mayor precisión.

La fórmula general de la función de transferencia pulso entre la salida  $Y(z)$  y la entrada  $X(z)$  está dada por:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (1)$$

donde  $a$  y  $b$  son los coeficientes.

La función de transferencia pulso puede expresarse como:

$$G_0(z) = \frac{(K_p + K_i + K_d) - (K_p + 2K_d)z^{-1} + K_d z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (2)$$

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = 0$$

$$b_0 = K_p + K_i + K_d$$

$$b_1 = -(K_p + 2K_d)$$

$$b_2 = K_d$$

• Programación directa. Considerando el filtro de la función de transferencia (1) y notando que tiene  $n$  polos y  $m$  ceros, se representa mediante bloques:

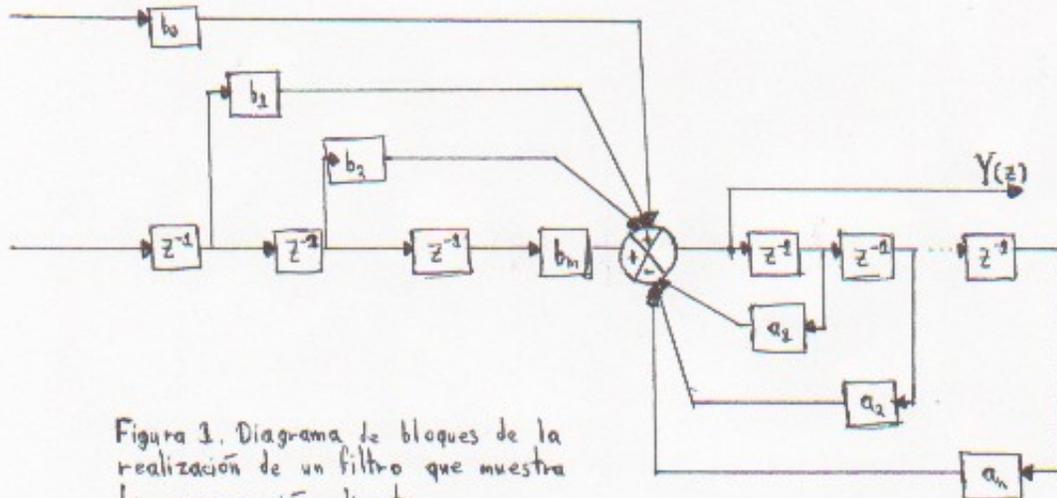


Figura 1. Diagrama de bloques de la realización de un filtro que muestra la programación directa.

Alumno: Ángel Arturo Ramírez Suárez  
 Grupo: IM 8-1

12/ febrero/ 2013

A esto se le llama programación directa y funciona obteniendo la realización del numerador y denominador de la función de transferencia pulso mediante conjuntos de elementos de retraso por separado. El número de elementos de retraso se puede reducir de  $n+m$  a  $n$  (donde  $n \geq m$ ).

• Programación estándar. Mediante el racomodo de diagramas de bloques se puede reducir la ecuación escribiendo la función de transferencia como:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)} \frac{H(z)}{X(z)} = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (3)$$

donde:

$$\frac{Y(z)}{H(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \quad (4)$$

y:

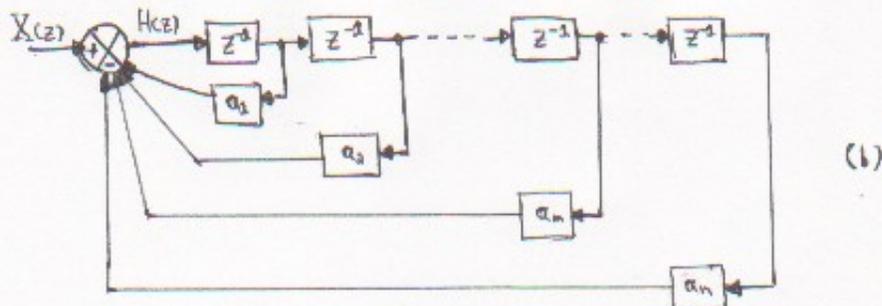
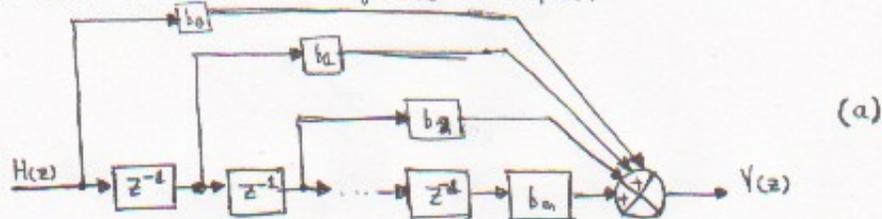
$$\frac{H(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (5)$$

se puede redibujar el diagrama de bloques como:

$$H(z) = X(z) - a_1 z^{-1} H(z) - a_2 z^{-2} H(z) - \dots - a_n z^{-n} H(z)$$

$$Y(z) = b_0 H(z) + b_1 z^{-1} H(z) + \dots + b_m z^{-m} H(z)$$

de las cuales se obtienen los diagramas de bloques:



18/Febrero/2013

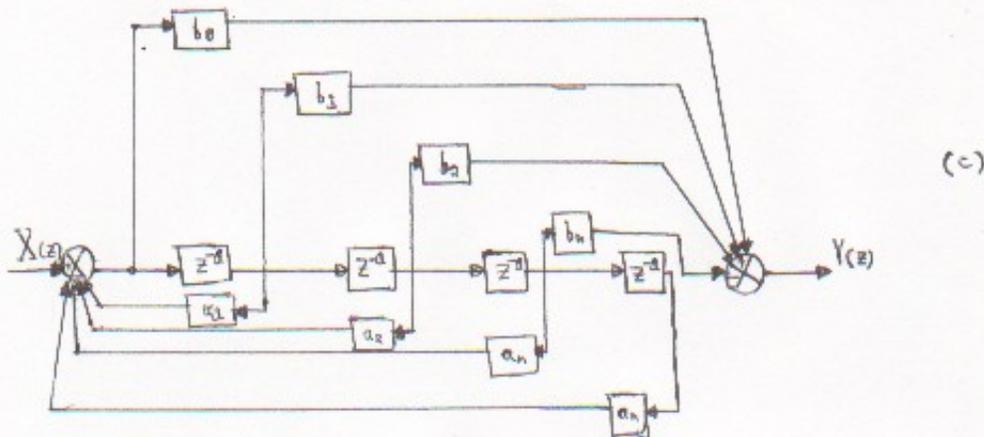


Figura 2. (a) Diagrama de bloques de la realización de la ecuación 4. (b). Diagrama de bloques de la ecuación 5. (c) Diagrama de bloques de la ecuación por filtro digital mediante programación estándar.

• **Comentarios.**

Utilizar un número mínimo de elementos de retraso y puntos suma ahorra memoria.

Existen 3 fuentes de incertidumbre en el sistema:

- 1.- Error de cuantificación que puede considerarse como ruido blanco ( $\sigma^2 = Q^2/12$ ).
- 2.- Error acumulativo por redondeo.
- 3.- Error por cuantificación de coeficientes  $a_1$  y  $b_1$  de la función de transferencia pulso por el incremento del orden de la función de transferencia pulso.

Para descomponer funciones de transferencia pulso y solucionar el tercer error se usa:

1.- **Programación en serie.**

Implantando una función de transferencia pulso  $G(z)$  como una conexión en serie de funciones de transferencia pulso de primer y segundo orden:

$$G(z) = G_1(z) G_2(z) \dots G_p(z)$$

Lo cual es:

$$G(z) = \prod_{i=1}^j \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}} \prod_{i=j+1}^p \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$

Los diagramas de bloques para:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}}$$

y para:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$

• **Programación en paralelo.** Consiste en expandir la función de transferencia pulso en fracciones parciales. Si  $G(z)$  se expande como una suma de  $A, G_1(z), G_2(z), \dots, G_q(z)$ , o de modo que:

$$G(z) = A + G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_q(z)$$

donde  $A$  es una constante y el diagrama puede obtenerse como una conexión en paralelo de  $q+1$  filtros digitales.  $G(z)$  puede expresarse como:

$$\begin{aligned} G(z) &= A + G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_q(z) \\ &= A + \sum_{i=1}^q G_i(z) + \sum_{i=1}^q G_i(z) \\ &= A + \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{1+a_i z^{-1}} + \sum_{i=1}^q \frac{c_i + f_i z^{-1}}{1+c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \end{aligned}$$

El diagrama de bloques para:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}}$$

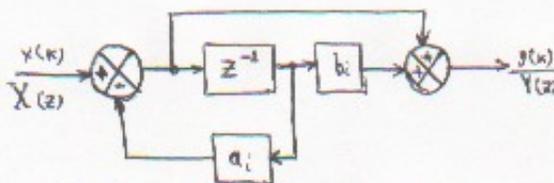


Figura 3. Representación de bloques del sistema.

• **Programación en escalera.** Al implantar una función en escalera (expandir la función de transferencia) en la siguiente fracción continuada y programar de acuerdo con esta ecuación:

$$G(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{\vdots \frac{1}{A_{n-1} + \frac{1}{B_n z + \frac{1}{A_n}}}}}}}$$

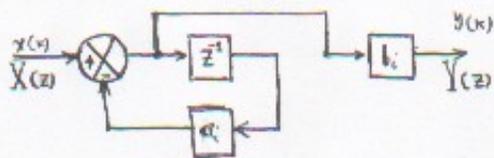
Y definiendo:

$$\begin{aligned} G_i^{(k)}(z) &= \frac{1}{B_i z + G_i^{(k+1)}(z)} & (i=1, 2, \dots, n-1) & \quad G_n^{(k)}(z) = \frac{1}{B_n z + \frac{1}{A_n}} \\ G_i^{(n)}(z) &= \frac{1}{A_i + G_i^{(n+1)}(z)} & (i=1, 2, \dots, n-1) & \end{aligned}$$

18/febrero/2013

Con lo que  $G(z)$  se puede escribir como:

$$G(z) = A_0 + G_i^{(b)}(z)$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}}$$

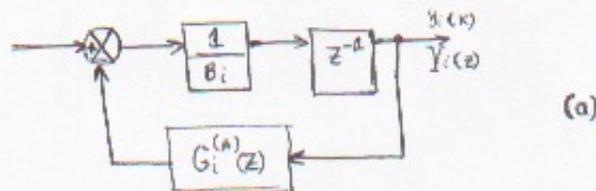
Mediante el uso de las funciones  $G_i^{(a)}(z)$ ,  $G_i^{(b)}(z)$ , y  $G_2^{(0)}(z)$ , la función de transferencia  $G(z)$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} G(z) &= A_0 + \frac{1}{B_i z + \frac{1}{A_i + G_2^{(0)}(z)}} \\ &= A_0 + \frac{1}{B_i z + G_i^{(a)}(z)} \\ &= A_0 + G_i^{(b)}(z) \end{aligned}$$

Y  $G_i^{(b)}(z)$  se puede escribir como:

$$G_i^{(b)}(z) = \frac{Y_i(z)}{X_i(z)} = \frac{1}{B_i z + G_i^{(a)}(z)}$$

El diagrama de bloques para la  $G_i^{(b)}(z)$  dada se muestra a continuación:



De igual manera  $G_i^{(a)}(z)$  puede escribirse como:

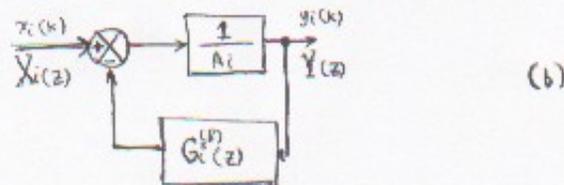


Figura 4. (a) Diagrama de bloques para  $G_i^{(b)}(z)$ . (b) Diagrama de bloques para  $G_i^{(a)}(z)$ .

19/ febrero/2013

Observe que  $G_n^{(n)}(z) = \frac{1}{A_n}$ .

**Comentarios.** Los filtros digitales en escalera tienen ventajas en sensibilidad y exactitud de los coeficientes. La estructura se consigue por expansión de  $G(z)$  en fracciones continuadas alrededor del origen.

Existen otras formas para obtener la estructura en escalera, por ejemplo un filtro digital  $G(z)$  se puede estructurar como:

$$G(z) = \hat{A}_0 + \frac{1}{\hat{B}_1 z^{-d} + \frac{1}{\hat{A}_1 + \frac{1}{\hat{B}_2 z^{-d} + \frac{1}{\hat{A}_2 + \frac{1}{\hat{B}_3 z^{-d} + \frac{1}{\hat{A}_3 + \frac{1}{\hat{B}_4 z^{-d} + \frac{1}{\hat{A}_4 + \frac{1}{\hat{B}_n z^{-d} + \frac{1}{\hat{A}_n}}}}}}}}$$

**Ejemplo 3.8.**

Obtenga los diagramas de bloques para la función de transferencia pulso del sistema (un filtro digital) mediante:

- 1) Programación directa.
- 2) Programación estándar.
- 3) Programación en escalera.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{2 - 0.6z^{-d}}{1 + 0.5z^{-d}}$$

1) Programación directa. La función de transferencia pulso se puede escribir como:

$$Y(z) = -0.5z^{-d} Y(z) + 2X(z) - 0.6z^{-d} X(z)$$

dando como resultado el siguiente diagrama de bloques:

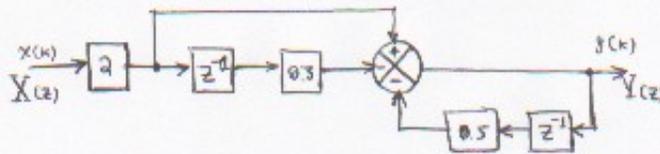


Figura 5. Diagrama de bloques de la función por programación directa.

19/Febrero/2013

2) Programación estándar. La función de transferencia pulso se reescribe:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)} \frac{H(z)}{X(z)} = (1 - 0.3z^{-1}) \frac{2}{1 + 0.5z^{-1}}$$

donde:

$$\frac{Y(z)}{H(z)} = 1 - 0.3z^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{H(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 + 0.5z^{-1}}$$

Obteniendo los siguientes diagramas de bloques:

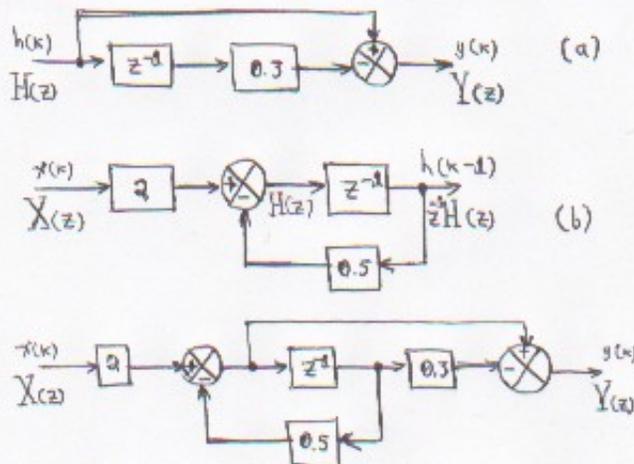


Figura 6. Diagrama de bloques de  $Y(z)/H(z)$  (a). Diagrama de bloques de  $H(z)/X(z)$  (b). Combinación de diagramas (a) y (b).

3) Programación en escalera. Se describe  $Y(z)/X(z)$  como sigue:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{2z - 0.6}{z + 0.5} = 2 + \frac{-1.6}{z + 0.5} = 2 + \frac{1}{-0.625z + \frac{1}{-3.2}}$$

De este modo  $A_0 = 2$  y

$$G_1^{(1)}(z) = \frac{1}{-0.625z + \frac{1}{-3.2}} = \frac{1}{-\frac{1}{1.6}z - 0.3125}$$

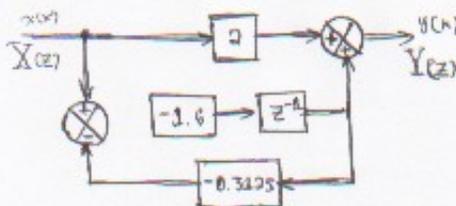


Figura 7. Diagrama de bloques de programación en escalera.

19/febrero/2013

- Filtro de respuesta al impulso infinita y filtro de respuesta al impulso finita.  
Los filtros se pueden clasificar de acuerdo con la duración de la respuesta al impulso. Considerando un filtro digital definido con la función de transferencia pulso:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

donde  $n \geq m$ . En términos de la ecuación en diferencias:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

La respuesta al impulso del filtro donde se supone que no todas las  $a_i$  son cero tiene un número infinito de muestras diferentes de cero, aunque sus magnitudes puedan hacerse despreciablemente pequeñas a medida que  $k$  se incrementa. A este tipo de filtro se le denomina filtro de respuesta al impulso infinita o filtro recursivo. En estos el error se incrementa y se reconocen por la presencia de  $a_i$  y  $b_i$  en los diagramas de bloques.

Considerando un filtro con función:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

en términos de la ecuación de diferencias:

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

la respuesta al impulso es una secuencia finita por lo que se le denomina filtro de respuesta al impulso finita, filtro no recursivo o de promedio móvil. Sólo posee valores presentes y pasados en la entrada y se reconoce por la ausencia de  $a_i$  en los diagramas de bloques.

- Realización de un filtro de respuesta finita al impulso.

La secuencia de la respuesta al impulso finita del filtro digital se define como  $g(kT)$ . Si la entrada  $x(kT)$  se aplica a este filtro, entonces la salida  $y(kT)$  está dada mediante:

$$y(kT) = \sum_{h=0}^k g(hT) x(kT-hT) \\ = g(0)x(kT) + g(T)x((k-1)T) + \dots + g(kT)x(0)$$

La salida es una sumatoria de convolución de la entrada y la secuencia de respuesta al impulso. El segundo miembro de la ecuación consta de  $k+1$  términos. La salida  $y(k)$  está dada en términos de las  $k$  entradas anteriores, y la entrada actual  $x(kT)$ .

29/ febrero/2013

Las características del filtro de respuesta al impulso finita se pueden resumir como sigue:

- 1.- Es no recursivo por lo que la acumulación de errores de salidas anteriores se puede evitar en el procesamiento de la señal.
- 2.- La implantación del filtro no requiere realimentación, de modo que la programación directa y estándar son idénticas. Se puede lograr por convolución de alta velocidad con la transformada rápida de Fourier.
- 3.- Los polos de la función de transferencia pulso del filtro de respuesta al impulso finita están en el origen y por lo tanto éste es siempre estable.
- 4.- Si la señal de entrada no incluye componentes de alta frecuencia, el número de elementos de retraso necesarios en el filtro se incrementa y la cantidad de tiempo de retraso se alarga.

### Ejemplo 3-9.

El filtro digital que se estudió en el ejemplo 3-8 es un filtro recursivo. Modifique este filtro y haga su realización como un filtro no recursivo. Luego obtenga la respuesta de este filtro no recursivo a una entrada delta de Kronecker.

Al dividir el numerador del filtro recursivo  $G(z)$  entre el denominador se obtiene:

$$G(z) = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$$
$$= 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7} + \dots$$

Al truncar de esta manera esta serie en  $z^{-7}$ , se obtiene el filtro no recursivo adecuado, como sigue:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7}$$

Note que se requiere un número grande de elementos de retraso para obtener un buen nivel de exactitud.

Al tomar la transformada  $z$  del filtro se obtiene:

$$y(kT) = 2x(kT) - 1.6x((k-1)T) + 0.8x((k-2)T) - 0.4x((k-3)T) + 0.2x((k-4)T) - 0.1x((k-5)T) + 0.05x((k-6)T) - 0.025x((k-7)T)$$

Para la entrada de Kronecker, donde  $x(0) = 1$  y  $x(kT) = 0$  para  $k \neq 0$ . Da como resultado:

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \\ y(1) &= -1.6 \\ y(2) &= 0.8 \\ y(3) &= -0.4 \\ y(4) &= 0.2 \\ y(5) &= -0.1 \\ y(6) &= 0.05 \\ y(7) &= -0.025 \end{aligned}$$



# Bibliografía

- [1] Katsuhiko Ogata.(1996). *Sistemas de control en tiempo discreto*. Estados Unidos de América. Prentice Hall.